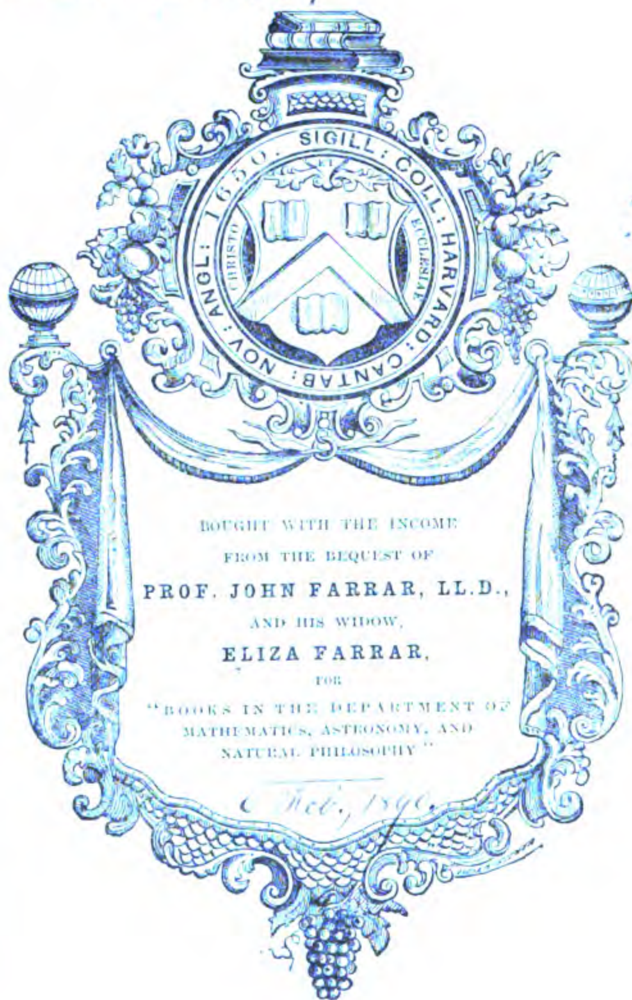

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
6 Oct, 1890

LEÇONS

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE

DES SURFACES.

COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

LEÇONS
SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES
ET LES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR

GASTON DARBOUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

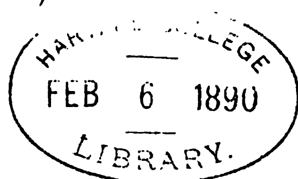
PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS. COORDONNÉES CURVILIGNES.
SURFACES MINIMA.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1887


HARVARD COLLEGE
FEB 6 1890
LIBRARY.

PRÉFACE.

L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui la première Partie est le résumé des Leçons que j'ai faites à la Sorbonne pendant les hivers de 1882 à 1885. J'avais commencé l'exposition de la *Théorie des surfaces* dans le but unique d'y trouver des applications nouvelles de la théorie, si vaste et si peu connue, des équations aux dérivées partielles. Je comptais consacrer une année à peine à cet enseignement; mais l'intérêt du sujet, et aussi les demandes de mes auditeurs, m'ont entraîné bien au delà des limites que j'avais primitivement fixées.

Ce premier Volume comprend trois parties distinctes. Le premier Livre traite des *Applications à la Géométrie de la théorie des mouvements relatifs;* j'aurai à revenir sur les propositions qui y sont exposées, dans la partie où seront étudiées plus tard, avec tous les détails nécessaires, les belles formules de M. Codazzi. Le second Livre contient l'étude des *différents systèmes de coordonnées curvilignes.* J'y considère successivement les systèmes à lignes conjuguées, dont l'étude a été trop négligée, les lignes asymptotiques, les lignes de courbure, les systèmes orthogonaux et isothermes.

Le Volume se termine par la *Théorie des surfaces minima* où j'ai mis à profit les travaux si remarquables publiés par d'éminents géomètres dans ces dernières années. Elle forme à peu près la moitié de ce Volume; sauf les trois derniers Chapitres qui ont été rédigés au moment de l'impression, elle a été enseignée à deux

reprises différentes, en 1882 et 1885. Une ou deux questions importantes y ont été omises; elles seront mieux à leur place dans la suite, quand j'aurai donné les propositions générales auxquelles on peut les rattacher.

Suivant son habitude constante, M. Gauthier-Villars, après avoir accueilli cet Ouvrage, a apporté tous ses soins à l'impression; qu'il reçoive ici mes plus vifs remerciements; je dois aussi les adresser à mes auditeurs, qui ont désiré voir ces Leçons publiées, et plus particulièrement à un de nos jeunes géomètres, M. G. Kœnigs, Maître de Conférences à l'École Normale, qui a bien voulu m'aider dans la revision des épreuves.

14 juin 1887.



THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

CHAPITRE I.

DU DÉPLACEMENT A UN PARAMÈTRE; APPLICATION A LA THÉORIE DES COURBES GAUCHES.

Déplacement d'un système invariable. — Application à la théorie des courbes gauches. — Propriété caractéristique de l'hélice. — Formules de M. J.-A. Serret. — Indicatrice sphérique. — Recherche de la courbe dont les normales principales sont aussi normales principales d'une autre courbe. — Développées des courbes gauches.

1. Considérons un corps solide ou système invariable, mobile autour d'un point fixe. On sait qu'à un instant quelconque les vitesses des différents points du système sont les mêmes que s'il tournait autour d'une droite passant par le point fixe, droite qui a reçu le nom d'*axe instantané de rotation*. On démontre en Mécanique que les rotations peuvent être représentées géométriquement par des droites, comme les forces, et composées ou décomposées suivant la même loi, c'est-à-dire que, si l'on compose ou si l'on décompose les rotations comme les forces, la vitesse imprimée par la rotation résultante à un point quelconque est la résul-

tante des vitesses qui seraient communiquées au même point par chacune des rotations composantes, existant isolément. On sait aussi que, si l'on considère un point mobile par rapport au système invariable, la vitesse absolue de ce point est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'*entraînement*. On désigne sous ce nom la vitesse qu'aurait un point qui, à l'instant considéré, coïnciderait avec le point mobile, mais demeurerait invariablement lié au système solide.

Il résulte de ces propositions que l'on pourra construire, à un instant quelconque, les vitesses de tous les points du système invariable dès que l'on aura, en grandeur et en direction, la rotation à cet instant. Il semblerait naturel de déterminer à chaque instant cette rotation par ses composantes relatives à trois axes rectangulaires, fixes dans l'espace et ayant pour origine le point fixe du système solide. En réalité, les éléments les plus importants, les seuls qui permettent le plus souvent une étude approfondie du mouvement, ce sont les composantes de la rotation relativement à des axes mobiles, entraînés dans le mouvement du système invariable. Rappelons rapidement la méthode employée en Mécanique.

Soient OX, OY, OZ trois axes fixes passant par le point fixe O du système et Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires invariablement liés au système mobile. Nous supposerons que les deux systèmes d'axes aient la même disposition, c'est-à-dire qu'ils puissent être amenés à coïncider. De plus nous supposerons que les sens des axes aient été choisis de telle manière que la rotation autour de OZ, qui déplacerait OX du côté de OY, soit représentée par une droite dirigée suivant la partie positive de OZ. Nous déterminerons les axes mobiles par les cosinus des angles qu'ils forment avec les axes fixes. Pour cela nous écrirons le tableau :

	x	y	z
X	a	b	c
Y	a'	b'	c'
Z	a''	b''	c''

qui fait connaître les cosinus des angles formés par chacun des axes fixes avec les axes mobiles.

On a les relations

$$(1)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0,\\ a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''c''=0,\\ a=b'c''-c'b'', & \begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}=1,\end{cases}$$

auxquelles il faut joindre toutes celles que l'on obtiendrait par des permutations circulaires effectuées, soit sur les lettres, soit sur les indices. Rappelons encore que les neuf cosinus peuvent être exprimés par les trois angles d'Euler, au moyen des formules (¹)

$$(2)\quad \begin{cases} a= \cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi,\\ b= \cos\theta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi,\\ c= \sin\theta\sin\psi,\\ a'= \cos\theta\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi,\\ b'= \cos\theta\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi,\\ c'= \sin\theta\cos\psi,\\ a''=-\sin\theta\sin\varphi,\\ b''=-\sin\theta\cos\varphi,\\ c''= \cos\theta.\end{cases}$$

Désignons maintenant par p, q, r les composantes de la rotation à l'instant t par rapport aux axes mobiles. Considérons un point dont les coordonnées soient x, y, z, relativement aux axes mobiles, et cherchons les composantes de sa vitesse *absolue* par rapport aux mêmes axes. En écrivant que cette vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de celles qui seraient dues aux trois

(¹) Dans ces formules, ψ désigne l'angle de OX avec l'intersection commune ON des deux plans des xy et des XY, φ désigne l'angle de Ox avec la même droite ON; enfin θ est l'angle de Oz et OZ. L'angle φ mesure la grandeur de la rotation qu'il faut imprimer à ON dans le plan des xy, et dans le sens direct, pour faire coïncider ON avec Ox; on peut supposer qu'il varie de 0° à 180°. De même, ψ mesure la rotation que l'on doit imprimer à ON dans le plan des XY, toujours dans le sens direct, pour amener cette droite à coïncider avec OX : cet angle varie de 0° à 360°.

rotations p, q, r, on obtiendra les expressions suivantes de ces composantes

$$(3)\qquad \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} + qz - ry, \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} + rx - pz, \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} + py - qx, \end{cases}$$

dont nous aurons souvent à faire usage.

Nous allons montrer, dès à présent, comment on peut en déduire les expressions de p, q, r en fonction des neuf cosinus et de leurs dérivées par rapport au temps. Pour cela, considérons le point pris sur l'axe OX à la distance 1. Ce point a pour coordonnées relatives (c'est-à-dire relativement aux axes mobiles) a, b, c. En exprimant que sa vitesse est nulle et en appliquant les formules (3), nous obtiendrons les équations fondamentales

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = br - cq, \\ \dfrac{db}{dt} = cp - ar, \\ \dfrac{dc}{dt} = aq - bp, \end{cases}$$

auxquelles on peut joindre les suivantes

$$(4')\qquad \begin{cases} \dfrac{da'}{dt} = b'r - c'q, \\ \dfrac{db'}{dt} = c'p - a'r, \\ \dfrac{dc'}{dt} = a'q - b'p; \end{cases}$$

$$(4'')\qquad \begin{cases} \dfrac{da''}{dt} = b''r - c''q, \\ \dfrac{db''}{dt} = c''p - a''r, \\ \dfrac{dc''}{dt} = a''q - b''p, \end{cases}$$

que l'on démontrera de la même manière.

On déduit de là les formules

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,dt &= \Sigma c\,db = -\Sigma b\,dc,\\ q\,dt &= \Sigma a\,dc = -\Sigma c\,da,\\ r\,dt &= \Sigma b\,da = -\Sigma a\,db,\end{aligned}\right.$$

qui donnent les valeurs cherchées des rotations. Si l'on remplace les cosinus par leurs expressions en fonction des angles d'Euler, on aura le système

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\frac{d\theta}{dt},\\ q &= \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\frac{d\theta}{dt},\\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\frac{d\psi}{dt},\end{aligned}\right.$$

qu'il serait aisé de démontrer géométriquement. En résolvant par rapport aux dérivées des angles, on trouve

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= q\sin\varphi - p\cos\varphi,\\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= q\cos\varphi + p\sin\varphi,\\ \frac{d\varphi}{dt} &= r + \cot\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi).\end{aligned}\right.$$

2. Tout cela étant rappelé, nous allons étudier la question suivante, qui est fondamentale dans notre théorie : *On donne p, q, r en fonction du temps t, et l'on propose de déterminer complètement le mouvement.*

Il est clair que la question sera résolue si l'on a les expressions des neuf cosinus en fonction du temps. Or il résulte immédiatement des formules (4) que, si l'on sépare les cosinus en trois groupes, formés respectivement de a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', les trois cosinus de chaque groupe sont des solutions simultanées du système

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \beta r - \gamma q,\\ \frac{d\beta}{dt} &= \gamma p - \alpha r,\\ \frac{d\gamma}{dt} &= \alpha q - \beta p.\end{aligned}\right.$$

Toute la difficulté se réduit donc à l'intégration de ce système. L'étude détaillée de cette intégration fera l'objet du Chapitre suivant. Pour le moment nous nous contenterons de signaler les propriétés suivantes du système (8).

D'abord, par suite de sa forme linéaire, il admettra toujours une solution, et une seule, pour laquelle les valeurs initiales de α, β, γ seront données.

En second lieu, si α, β, γ; α', β', γ' désignent deux systèmes de solutions quelconques, les expressions

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma',\quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2$$

seront des constantes. On le reconnaît aisément en les différentiant et tenant compte des équations (8).

Ces propriétés vont nous permettre d'établir qu'il y a toujours, quelles que soient les expressions de p, q, r en fonction du temps, une infinité de mouvements dans lesquels ces trois quantités sont les composantes de la rotation relativement aux axes mobiles.

Considérons en effet un trièdre trirectangle (T_0), de même sens que le trièdre OXYZ, formé par les axes fixes et soient a_0, b_0, c_0, ... les cosinus directeurs de OX, OY, OZ par rapport aux axes de (T_0). Déterminons les trois systèmes de solutions des équations (8), a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', qui correspondent respectivement aux valeurs initiales suivantes : a_0, b_0, c_0; a'_0, b'_0, c'_0; a''_0, b''_0, c''_0.

Les fonctions, telles que

$$a^2+b^2+c^2,\quad aa'+bb'+cc',\quad \ldots,$$

ayant pour valeur initiale 1 ou 0, et devant rester constantes d'après les propriétés du système (8), ne cesseront pas de conserver leurs valeurs initiales; par conséquent, les neuf quantités a, a', a'', ... seront à chaque instant les cosinus directeurs de trois droites rectangulaires formant un trièdre mobile (T) dont la position initiale sera (T_0). Comme cette position initiale peut être choisie à volonté, on voit qu'il existe une infinité de mouvements pour lesquels p, q, r sont des fonctions données du temps.

Tous ces mouvements, qui dépendent de trois constantes arbitraires, se réduisent au fond à un seul, mais qui serait rapporté à des axes fixes différents.

En effet, considérons, dans l'un quelconque d'entre eux, la position occupée par le trièdre mobile à l'instant initial, et choisissons-la pour le système d'axes fixes auquel nous rapporterons le mouvement du système mobile. Les valeurs initiales des neuf cosinus sont alors 1 ou 0, la solution qui correspond à ces valeurs numériques ne contient aucune constante arbitraire et est bien déterminée.

Il résulte de ce qui précède que, lorsqu'on aura obtenu une solution quelconque du problème, c'est-à-dire un système de valeurs des neuf cosinus, il suffira, si l'on veut avoir la solution la plus générale, de changer d'axes fixes, ce qui introduira trois constantes; puis de supposer que les nouvelles formules se rapportent aux anciens axes.

3. Nous allons maintenant étudier le cas où le système mobile n'a plus de point fixe. Alors il faut joindre aux composantes p, q, r celles de la vitesse de l'origine O des axes mobiles, prises toujours relativement aux axes mobiles Ox, Oy, Oz. Désignons-les par ξ, η, ζ; jointes aux trois rotations, elles interviennent dans toutes les questions relatives à l'étude du mouvement. Supposons que l'on connaisse les expressions de ces six quantités en fonction du temps, et cherchons comment on déterminera le mouvement du trièdre mobile. Désignons par (T) ce trièdre mobile, et soit (T′) le trièdre dont l'origine est un point fixe quelconque et dont les axes sont parallèles à ceux de (T). A un instant quelconque les deux trièdres sont animés de la même rotation et, par conséquent, les neuf cosinus se détermineront au moyen de p, q, r comme dans le cas précédent; d'ailleurs, si X_0, Y_0, Z_0 désignent les coordonnées de l'origine mobile O par rapport aux axes fixes, on a évidemment, en projetant la vitesse de cette origine sur les axes fixes,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX_0}{dt} &= a\xi + b\eta + c\zeta,\\ \frac{dY_0}{dt} &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta,\\ \frac{dZ_0}{dt} &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta. \end{aligned}\right.$$

Quand on aura déterminé les cosinus, ces formules feront con-

naître X_0, Y_0, Z_0 par de simples quadratures qui introduiront trois constantes nouvelles.

Ici encore, tous les mouvements possibles correspondants aux différentes valeurs des six constantes arbitraires se réduisent à un seul et même mouvement, observé par rapport à des axes différents; car l'intégration n'introduit aucune constante arbitraire et ne donne qu'un seul mouvement, si l'on suppose que les axes fixes coïncident avec la position initiale des axes mobiles.

Je rappellerai, relativement au cas que nous venons de considérer, que si x, y, z sont les coordonnées d'un point relativement aux axes mobiles, la vitesse absolue de ce point aura pour composantes, relatives aux mêmes axes, les trois quantités

$$(10)\qquad \begin{cases} V_x = \xi + qz - ry + \dfrac{dx}{dt}, \\ V_y = \eta + rx - pz + \dfrac{dy}{dt}, \\ V_z = \zeta + py - qx + \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Considérons, par exemple, les points invariablement liés au système mobile et cherchons ceux pour lesquels la vitesse est minimum. Il faudra déterminer les valeurs de x, y, z rendant minimum la somme

$$(\xi + qz - ry)^2 + (\eta + rx - pz)^2 + (\zeta + py - qx)^2.$$

En égalant à zéro les dérivées par rapport à x, à y et à z, on obtient trois équations qui se réduisent aux deux suivantes :

$$\frac{\xi + qz - ry}{p} = \frac{\eta + rx - pz}{q} = \frac{\zeta + py - qx}{r}.$$

Ces deux équations représentent une droite, l'axe central du mouvement à l'instant considéré. On trouve facilement, pour la valeur commune des rapports précédents,

$$\frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{p^2 + q^2 + r^2},$$

ce qui donne, pour la valeur minimum de la vitesse,

$$\frac{\xi p + \eta q + \zeta r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement du système se réduise à une simple rotation est donc la suivante

$$\xi p + \eta q + \zeta r = 0,$$

et, dans ce cas, l'axe de rotation est représenté par les trois équations

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi + qz - ry = 0, \\ \eta + rx - pz = 0, \\ \zeta + py - qx = 0, \end{cases}$$

qui caractérisent en effet les points dont la vitesse est nulle, comme le montrent les formules (10).

4. Pour indiquer dès à présent une application des propositions précédentes, considérons une courbe gauche quelconque et étudions le mouvement du trièdre (T) formé par la tangente que nous prendrons pour axe des x, la normale principale que nous prendrons pour axe des y, en la supposant, par exemple, dirigée vers le centre de courbure, et la binormale qui sera l'axe des z et dont le sens est défini par les conventions déjà faites.

Prenons l'arc s comme variable indépendante ou, ce qui est la même chose, supposons

$$\frac{ds}{dt} = 1.$$

On a ici

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

et, si x, y, z désignent les coordonnées du point de la courbe, qui est le sommet du trièdre, par rapport à des axes fixes,

$$a = \frac{dx}{ds}, \qquad a' = \frac{dy}{ds}, \qquad a'' = \frac{dz}{ds}.$$

Les formules générales (4) nous donnent

$$(12)\quad da = (br - cq)\,ds, \qquad db = (cp - ar)\,ds, \qquad dc = (aq - bp)\,ds.$$

Exprimons que la binormale, dont les cosinus directeurs sont c, c', c'', est perpendiculaire au plan osculateur, c'est-à-dire aux deux droites dont les cosinus directeurs sont a, a', a'' et $a + da$, $a' + da'$, $a'' + da''$. L'une des équations sera satisfaite d'elle-même

et l'autre nous donnera la condition

$$\Sigma\, c\, da = q\, ds = 0.$$

Ainsi la composante q doit être nulle, et les formules (12) se réduisent aux suivantes :

$$(13)\qquad \frac{da}{ds} = br, \qquad \frac{db}{ds} = cp - ar, \qquad \frac{dc}{ds} = -\,bp.$$

Il est aisé d'obtenir la signification géométrique des rotations p et r.

Menons en effet par un point fixe des parallèles aux arêtes du trièdre (T); nous obtiendrons un trièdre (T_1) dont la rotation sera la même, à un instant quelconque, que celle du trièdre (T). Un point situé à la distance 1 sur l'axe des x du trièdre (T_1) aura une vitesse dont les composantes seront, d'après les formules (3),

$$0, \quad r, \quad 0,$$

et, par conséquent, ce point décrira le chemin $r\,ds$; ou, ce qui est la même chose, la tangente à la courbe tournera de l'angle $r\,ds$ quand son point de contact décrira l'arc ds ; donc la composante r est égale à la première courbure de la courbe.

En prenant un point situé à la distance 1 sur l'axe des z du trièdre (T_1), on verra de même que les composantes de sa vitesse seront

$$0, \quad -p, \quad 0,$$

et, par conséquent, le plan osculateur tournera de l'angle $-p\,ds$, quand le point de la courbe décrira l'arc ds. En d'autres termes, $-p$ sera la torsion de la courbe. Ainsi nous pourrons poser

$$(14)\qquad r = \frac{1}{\rho}, \qquad p = -\frac{1}{\tau},$$

ρ et τ désignant les rayons de courbure et de torsion, et les formules (13) deviendront

$$(15)\qquad \frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho}, \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{\tau}, \qquad \frac{db}{ds} = -\frac{c}{\tau} - \frac{a}{\rho}.$$

On reconnaît les formules de J.-A. Serret, qui jouent un rôle si important dans la théorie des courbes gauches.

5. La méthode qui nous a permis de les établir met en évidence quelques propositions qu'il serait aisé de démontrer autrement et dont on fait un usage continuel dans les démonstrations géométriques.

Étant donnée la courbe gauche (C), si par l'origine on mène une parallèle à la tangente de cette courbe, de longueur égale à 1, l'extrémité de cette parallèle décrira une courbe sphérique que nous appellerons, avec M. P. Serret, l'*indicatrice sphérique* de la courbe gauche. Il résulte de ce qui précède que la tangente à l'indicatrice sphérique est parallèle à la normale principale de la courbe (C); car le point qui décrit l'indicatrice est celui qui est situé à la distance 1 sur l'axe des x du trièdre (T_1), et nous avons vu que la vitesse de ce point est égale à $\frac{1}{\rho}$ et parallèle à la normale principale.

De même, si par l'origine nous menons une droite de longueur 1, parallèle à la binormale, l'extrémité de cette droite sera le point à la distance 1 sur l'axe des z du trièdre (T_1); ce point aura une vitesse égale à $\frac{1}{\tau}$ et qui sera encore parallèle à la normale principale; la courbe sphérique qu'il décrit sera parallèle à l'indicatrice : on l'obtiendra en portant sur les grands cercles normaux à l'indicatrice, et dans un sens convenable, une longueur égale à un quadrant; en d'autres termes, ce sera la *courbe polaire* de l'indicatrice sphérique.

6. Nous signalerons encore le théorème suivant qui est fort important [1] :

Toute courbe, dans laquelle le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ est constant, est une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

En effet, si nous considérons le mouvement du trièdre (T_1) pa-

---

[1] *Voir*, au sujet de ce théorème :

Puiseux, *Problème de Géométrie* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. VII); Bertrand, *Sur la courbe dont les deux courbures sont constantes* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XIII); Liouville, *Application de l'Analyse à la Géométrie par Monge*, 5e édition, Note I.

rallèle à (T), nous savons que, la composante q étant nulle, l'axe instantané de rotation est toujours dans le plan des xz. Lorsque le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ ou $\frac{-p}{r}$ demeurera constant, cet axe instantané deviendra fixe par rapport aux axes mobiles. Or on sait que, lorsque l'axe instantané occupe une position invariable par rapport au système mobile, il demeure fixe dans l'espace. Le trièdre (T_1) tournera donc autour d'une droite fixe; son axe des x, qui est parallèle à la tangente de la courbe, fera un angle constant avec cette droite fixe et engendrera un cône de révolution. On reconnaît la propriété caractéristique de l'hélice tracée sur un cylindre quelconque.

Lorsque ρ et τ sont constants, cette hélice est tracée sur un cylindre de révolution. Dans ce cas, en effet, le mouvement du trièdre (T) présente à chaque instant une translation et une rotation invariables. Alors tous les points du système mobile, et en particulier l'origine du trièdre, décrivent des hélices tracées sur des cylindres circulaires droits.

7. Dans le mouvement que nous venons d'étudier, trois des six quantités $\xi, \ldots, p, \ldots$ sont nulles. Nous allons montrer que, réciproquement, si l'on a

$$\eta = \zeta = q = 0,$$

l'origine du trièdre décrit une courbe qui est tangente à l'axe des x de ce trièdre et admet l'axe des y pour normale principale. Le premier point résulte immédiatement des équations

$$\eta = \zeta = 0.$$

D'autre part, la composante q étant nulle, nous avons

$$\Sigma\, c\, da = 0.$$

L'axe des z du trièdre mobile est donc normal à deux positions consécutives de l'axe des x. En d'autres termes, le plan des xy est le plan osculateur de la courbe décrite par l'origine des coordonnées.

En réduisant toutes les vitesses dans le même rapport, de manière que ξ devienne égale à 1, on doit remplacer p, r par $\frac{p}{\xi}$, $\frac{r}{\xi}$. La courbure et la torsion de la courbe sont données par les for-

mules

(16) $$\frac{1}{\rho} = \frac{r}{\xi}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{-p}{\xi}.$$

8. La méthode cinématique que nous venons d'exposer s'applique d'une manière élégante à la solution complète du problème suivant, complètement résolu par M. Bertrand [1] : *Rechercher s'il existe une courbe dont les normales principales soient aussi normales principales d'une autre courbe.*

Soient M un point de la courbe donnée et (T) le trièdre relatif à ce point. Si l'on porte sur la normale principale une longueur $MM' = a$, la vitesse du point M' aura pour composantes

$$1 - ra, \quad \frac{da}{ds}, \quad pa,$$

suivant Mx, My, Mz respectivement; cela résulte des formules (10). Si l'on veut que la courbe décrite par le point M' soit normale à MM', il faudra que l'on ait

$$\frac{da}{ds} = 0,$$

a devra être constant : ce résultat était évident *a priori,* et nous aurions pu le supposer immédiatement.

Alors la vitesse v de M' est perpendiculaire à My et, si l'on appelle ω l'angle qu'elle fait avec Mx, on a

(17) $$\begin{cases} v \cos\omega = 1 - ra, \\ v \sin\omega = pa. \end{cases}$$

La droite M'M sera alors normale de la courbe décrite par le point M'; mais elle ne sera pas en général normale principale. Construisons le trièdre (T') formé par la tangente $M'x'$ à la courbe décrite par le point M', par la droite $M'y$ et par la perpendiculaire commune à ces deux droites, et remarquons que l'axe des y de

(1) J. Bertrand, *Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XV, p. 332). *Voir* aussi le Mémoire de M. Bonnet inséré dans le XXXIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* où l'auteur démontre (p. 134) que, si deux courbes ont les mêmes normales principales, leurs plans osculateurs aux points correspondants font un angle constant.

ce trièdre coïncide avec l'axe de même nom de (T). On aurait un trièdre ayant même orientation que (T′) en faisant tourner le trièdre (T) de l'angle ω autour de son axe des y. On obtiendra donc la rotation instantanée du trièdre (T′) en composant les deux rotations p, r du trièdre (T) avec une rotation $\frac{d\omega}{dt}$ autour de My.

Or la condition nécessaire et suffisante pour que la droite My ou M′y soit la normale principale de la courbe décrite par le point M′ est, nous l'avons vu, que la rotation de (T′) autour de M′y soit nulle. Il faudra donc que l'on ait

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

et, par suite, que l'angle ω soit constant. Ainsi *les plans osculateurs des courbes décrites par les points* M, M′ *devront se couper sous un angle constant* ω.

Si l'on se reporte maintenant aux formules (17), on en déduit, par l'élimination de v,

$$\frac{\sin\omega}{a} = r\sin\omega + p\cos\omega$$

ou, en remplaçant r et p par leurs expressions géométriques,

$$(18) \qquad \frac{\sin\omega}{a} = \frac{\sin\omega}{\rho} - \frac{\cos\omega}{\tau}.$$

Il y a donc une relation linéaire entre les deux courbures.

9. Réciproquement, s'il existe une relation linéaire entre les deux courbures

$$C = \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau},$$

la courbe jouira en général de la propriété indiquée. On identifiera la relation précédente avec l'équation (18), et l'on aura

$$a = \frac{A}{C}, \qquad \cot\omega = -\frac{B}{A}.$$

Signalons cependant deux cas d'exception :

Si l'on a $C = 0$, sans que A soit nul, la relation entre les cour-

bures prend la forme

$$\frac{\rho}{\tau} = \text{const.},$$

et a devient infini. Ainsi la seconde courbe, lieu de M′, est rejetée à l'infini. La courbe proposée est alors une hélice.

Si l'on a $A = 0$, c'est-à-dire si la courbe a une torsion constante, a est nul et les deux courbes, lieux de M et de M′, se confondent.

On peut avoir plus de deux courbes ayant les mêmes normales principales : 1° si la valeur de a est indéterminée, c'est-à-dire si l'on a $A = C = 0$; dans ce cas, la courbe sera plane; 2° s'il y a plus d'une relation linéaire entre les courbures, c'est-à-dire si les deux courbures sont constantes; dans ce cas, l'équation (18) sera satisfaite pour toute valeur de a et fera connaître ω; il y aura donc une infinité de courbes ayant les mêmes normales principales. La courbe primitive et, par conséquent, toutes les autres seront des hélices tracées sur des cylindres circulaires droits; la surface formée par les normales principales sera l'hélicoïde gauche à plan directeur.

10. Revenons au cas général et cherchons les deux courbures de la courbe lieu de M′. Le trièdre (T′) relatif à cette courbe est invariablement lié au trièdre (T). Il suffira donc, pour avoir les composantes p', r' relatives au trièdre (T′), de projeter les rotations p, r sur les axes de (T′). Cela donne

$$\begin{aligned} p' &= p\cos\omega + r\sin\omega, \\ r' &= -p\sin\omega + r\cos\omega. \end{aligned}$$

Or on a, d'après les formules (16), en désignant par $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\tau'}$ les deux courbures de la courbe lieu de (M′),

$$p' = -\frac{v}{\tau'}, \qquad r' = \frac{v}{\rho'}.$$

Les relations précédentes nous donnent donc, par la substitution des expressions de p, q, p', q',

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{v}{\tau'} &= \frac{\cos\omega}{\tau} - \frac{\sin\omega}{\rho}, \\ \frac{v}{\rho'} &= \frac{\sin\omega}{\tau} + \frac{\cos\omega}{\rho}, \end{aligned} \right.$$

formules auxquelles on peut joindre le système suivant, obtenu en remplaçant r et p par leurs expressions dans les formules (17) :

$$(20)\qquad \begin{cases} \nu\cos\omega = 1 - \dfrac{a}{\rho}, \\ \nu\sin\omega = \quad - \dfrac{a}{\tau}. \end{cases}$$

Les formules (19) et (20) contiennent toutes les relations entre les deux courbes. On en déduit, par exemple,

$$\frac{\cos\omega}{\tau'} + \frac{\sin\omega}{\rho'} = -\frac{\sin\omega}{a},$$

relation linéaire entre les deux courbures de la nouvelle courbe dont l'existence était évidente *a priori*. D'ailleurs le système (19) peut être remplacé par le suivant

$$(21)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\cos\omega}{\nu} = 1 + \dfrac{a}{\rho'}, \\ \dfrac{\sin\omega}{\nu} = \dfrac{a}{\tau'}, \end{cases}$$

qui est beaucoup plus simple ([1]).

L'un des cas particuliers les plus intéressants avait été déjà signalé et étudié par Monge ([2]) : c'est celui où les plans osculateurs des deux courbes sont perpendiculaires ; on a alors

$$\rho = a, \quad \rho' = -a.$$

Chacune des deux courbes est le lieu des centres de courbure de l'autre et aussi le lieu des centres des sphères osculatrices à l'autre.

([1]) *Voir* une Note *Sur les courbes qui ont les mêmes normales principales*, insérée par M. Mannheim dans les *Comptes rendus* (t. LXXXV, p. 212), où se trouvent démontrées quelques relations que l'on pourrait déduire des formules établies ici.

([2]) MONGE, *Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont suceptibles d'une véritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux dérivées partielles élevées* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour l'année* 1784, p. 536 et suiv.).

Ce beau travail vient compléter, comme l'indique son titre, le célèbre *Mémoire sur le Calcul intégral des équations aux différences partielles*, publié dans le

11. Les résultats obtenus par M. Bertrand donnent immédiatement la solution d'un problème dont on s'est beaucoup occupé : *Déterminer toutes les surfaces gauches dont les rayons de courbure sont, en chaque point, égaux et de signes contraires.*

En effet, les surfaces gauches cherchées devront avoir, en chaque point, pour indicatrice une hyperbole équilatère et, par conséquent, leurs lignes asymptotiques curvilignes doivent couper les génératrices rectilignes à angle droit. Le plan osculateur d'une ligne asymptotique étant le plan tangent de la surface, on voit que les génératrices rectilignes doivent être les normales principales de toutes les asymptotiques. D'après le résultat précédemment démontré, ces asymptotiques ne peuvent être que des hélices et la surface réglée un hélicoïde à plan directeur. On a vu d'ailleurs (n° 9) que cette surface jouit bien de la propriété énoncée. Ainsi *l'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée dont les rayons de courbure soient, en chaque point, égaux et de signes contraires.*

12. Nous terminerons ce sujet en donnant la détermination des développées d'une courbe gauche.

Considérons le trièdre (T) relatif à un point M. La développée devra être engendrée par un point N du plan des yz, et ce point devra être choisi de telle manière que la tangente à la courbe qu'il décrit vienne, à chaque instant, passer en M.

Appelons y et z ses coordonnées. Les composantes de sa vitesse sont

$$1 - ry, \quad \frac{dy}{ds} - pz, \quad \frac{dz}{ds} + py. \tag{22}$$

---

même Volume (p. 118), et où se trouvent les premières recherches de Monge sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. Monge fait voir, dans le *Supplément*, que si une courbe a un rayon de courbure constant, le lieu des centres de courbure jouira de la même propriété et aura ses centres de courbure sur la courbe primitive. De plus, les plans osculateurs des deux courbes aux points correspondants seront rectangulaires. Mais le procédé que Monge fait connaître, pour la détermination de l'équation en termes finis des courbes dont la courbure est constante, est évidemment inexact. Les équations finies que donne l'illustre géomètre contiennent, en effet, deux fonctions arbitraires que Monge regarde comme indépendantes, bien qu'il ait démontré, quelques pages auparavant, qu'elles sont liées l'une à l'autre par une équation différentielle.

Exprimons que la vitesse est dirigée vers le point M. Nous avons les deux équations

$$y = \frac{1}{r} = \rho, \qquad \frac{dy - pz\,ds}{dz + py\,ds} = \frac{y}{z},$$

ou

$$\frac{z\,dy - y\,dz}{y^2 + z^2} = p\,ds = -\frac{ds}{\tau}.$$

En intégrant, nous trouvons

$$\text{arc tang}\,\frac{z}{y} = \int \frac{ds}{\tau}.$$

On a donc

$$(23) \qquad \begin{cases} y = \rho, \\ z = y \,\text{tang} \displaystyle\int \frac{ds}{\tau}. \end{cases}$$

Ces équations contiennent toute la théorie des développées. On voit que l'angle V, formé par la normale principale avec la droite qui joint le point de la développée au point correspondant de la courbe, a pour valeur

$$V = \int \frac{ds}{\tau};$$

donc les normales de la courbe qui enveloppent deux développées différentes font, entre elles, un angle constant. Réciproquement, si deux normales à la courbe font un angle constant, et si l'une enveloppe une développée de la courbe, il en est de même de l'autre. Ce sont là des propositions dont on fait souvent usage.

La première des formules (23) nous montre encore que les développées sont tracées tout entières sur la *surface polaire,* enveloppe des plans normaux à la courbe proposée. Il résulte, en effet, des formules (22) relatives à la vitesse du point (y, z) que tous les points du plan normal situés sur la droite $y = \rho$ ont leur vitesse dirigée dans ce plan; donc cette droite est la génératrice de contact du plan avec son enveloppe, la surface polaire. D'ailleurs, le plan osculateur de la développée, contenant la tangente à la courbe proposée, est, par cela même, normal à la surface polaire.

CHAPITRE II.

SUR L'INTÉGRATION DU SYSTÈME LINÉAIRE QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Systèmes linéaires possédant une intégrale du second degré. — Leur intégration ramenée à celle d'une équation de Riccati. — Remarques générales sur cette équation.

---

13. Il nous reste à étudier d'une manière détaillée l'intégration du système

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \\ \dfrac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p, \end{cases}$$

auquel satisfont les trois groupes de cosinus. Nous avons déjà signalé une propriété fondamentale de ce système. Il admet l'intégrale du second degré

$$(2)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}$$

et l'existence de cette intégrale entraîne, comme corollaires, une série de propositions qui facilitent, dans plusieurs cas, l'intégration du système.

Avant de commencer l'étude des équations (1), je vais d'abord montrer que tout système linéaire de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = A\alpha + B\beta + C\gamma, \\ \dfrac{d\beta}{dt} = A'\alpha + B'\beta + C'\gamma, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = A''\alpha + B''\beta + C''\gamma, \end{cases}$$

où A, B, C, ... sont des fonctions de t, peut être ramené à la

forme (1) toutes les fois qu'il admet une intégrale du second degré

$$(4)\qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const.},$$

φ désignant une fonction homogène du second degré, à coefficients constants ou variables.

En effet, par une substitution linéaire qui ne change évidemment pas la forme des équations (3), on peut ramener l'équation (4) (sauf les cas exceptionnels, que l'on traitera facilement, où la fonction φ serait un carré ou une somme de deux carrés) à la forme

$$(5)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.}$$

Si l'on exprime que le premier membre de cette équation est une intégrale du système (3), on obtient les équations

$$A = B' = C'' = B + A' = C + A'' = C' + B'' = 0,$$

qui montrent bien que le système (3) se ramène à la forme (1).

Le système (1) nous apparaît donc comme le type ou la *forme réduite* d'une classe entière de systèmes présentant la propriété, que l'on rencontre fréquemment dans les applications, d'admettre une intégrale du second degré. Ce caractère particulier des équations que nous allons étudier méritait d'être signalé et suffirait à justifier l'étendue des développements qui vont suivre.

14. Je vais montrer d'abord que, toutes les fois que l'on connaîtra une solution particulière $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ du système (1), on pourra joindre l'intégrale du premier degré

$$\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0 = \text{const.},$$

à l'intégrale déjà donnée du second degré.

En effet, si l'on a une solution quelconque (α, β, γ) du système (1), on en pourra déduire, d'après les propriétés de tout système linéaire, une solution plus générale

$$\alpha + k\alpha_0,\quad \beta + k\beta_0,\quad \gamma + k\gamma_0,$$

k désignant une constante quelconque. On devra donc avoir, pour toutes les valeurs de k,

$$(\alpha + k\alpha_0)^2 + (\beta + k\beta_0)^2 + (\gamma + k\gamma_0)^2 = \text{const.}$$

ou, en développant,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2k(\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+\gamma\gamma_0)+k^2(\alpha_0^2+\beta_0^2+\gamma_0^2)=\text{const.}$$

Le premier et le dernier terme du premier membre étant constants, il en sera de même de

$$\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+\gamma\gamma_0,$$

comme il fallait le démontrer.

Il résulte évidemment de là que, si l'on connaissait seulement deux solutions particulières du système (1), $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, on pourrait immédiatement écrire la solution générale, qui serait définie par les équations

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=\text{const.},\\ \alpha\alpha_0+\beta\beta_0+\gamma\gamma_0&=\text{const.},\\ \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1&=\text{const.};\end{aligned}$$

ces équations peuvent être résolues et donnent pour α, β, γ les valeurs

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha&=c_0\alpha_0+c_1\alpha_1+c_2(\beta_0\gamma_1-\beta_1\gamma_0),\\ \beta&=c_0\beta_0+c_1\beta_1+c_2(\gamma_0\alpha_1-\alpha_0\gamma_1),\\ \gamma&=c_0\gamma_0+c_1\gamma_1+c_2(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0),\end{aligned}\right.$$

où c_0, c_1, c_2 désignent des constantes arbitraires. Mais on peut obtenir une proposition plus complète et montrer que, si l'on connaît une seule solution du système (1), une seule quadrature suffira à nous donner son intégrale générale.

15. Pour établir ce résultat essentiel, remarquons que les valeurs les plus générales de α, β, γ doivent satisfaire à là relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\text{const.}$$

Commençons d'abord par écarter le cas où la constante serait nulle; on pourra toujours, en divisant ces valeurs par une constante convenable, supposer que l'on a

$$(7)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Remarquons même que, dans le problème particulier que nous avons à traiter, α, β, γ, étant trois cosinus directeurs, doivent nécessairement satisfaire à cette relation. Il est naturel d'exprimer α,

β, γ en fonction de deux variables indépendantes, de manière que la relation précédente soit toujours satisfaite, et de chercher les équations différentielles auxquelles devront satisfaire ces deux variables.

Or, si l'on regarde α, β, γ comme les coordonnées d'un point de l'espace, l'équation (7) représentera une sphère de rayon 1, ayant pour centre l'origine des coordonnées. Considérons cette sphère comme une surface réglée, admettant un double système de génératrices imaginaires, et prenons pour variables deux quantités demeurant constantes respectivement sur les génératrices de chaque système. Pour cela, nous poserons

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha + i\beta}{1-\gamma} = \dfrac{1+\gamma}{\alpha - i\beta} = x, \\ \dfrac{\alpha - i\beta}{1-\gamma} = \dfrac{1+\gamma}{\alpha + i\beta} = -\dfrac{1}{y}, \end{cases}$$

ce qui donnera

$$(9)\qquad \alpha = \frac{1-xy}{x-y}, \quad \beta = i\frac{1+xy}{x-y}, \quad \gamma = \frac{x+y}{x-y}.$$

Remarquons que, d'après les formules (8), x et y seront imaginaires quand α, β, γ seront réels, et, en outre, l'imaginaire conjuguée de x sera $-\dfrac{1}{y}$.

Si nous substituons les valeurs (9) de α, β, γ dans les équations différentielles, ces équations se réduiront à deux, comme on devait s'y attendre, et, après quelques calculs faciles, on obtiendra le système

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -irx + \dfrac{q-ip}{2} + \dfrac{q+ip}{2}x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -iry + \dfrac{q-ip}{2} + \dfrac{q+ip}{2}y^2; \end{cases}$$

x et y doivent donc être deux solutions différentes de la même équation en σ

$$(11)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = -ir\sigma + \frac{q-ip}{2} + \frac{q+ip}{2}\sigma^2,$$

et l'intégration du système proposé est ramenée à celle de cette seule équation. Deux solutions particulières distinctes de cette équation donneront toujours, par l'emploi des formules (9), des

valeurs réelles ou imaginaires de α, β, γ, vérifiant le système (1). Remarquons même que, lorsque p, q, r seront des fonctions réelles, il suffira de connaître une solution particulière σ de l'équation (11) pour en déduire une solution (α, β, γ) du système proposé. En effet, désignons par σ' l'imaginaire conjuguée de σ. Je vais montrer que $-\frac{1}{\sigma'}$ est encore une solution particulière de l'équation (11).

Pour cela changeons i en $-i$ dans cette équation, nous aurons

$$\frac{d\sigma'}{dt} = +ir\sigma' + \frac{q+ip}{2} + \frac{q-ip}{2}\sigma'^2$$

et, par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sigma'}\right) = -ir\left(-\frac{1}{\sigma'}\right) + \frac{q-ip}{2} + \frac{q+ip}{2}\left(-\frac{1}{\sigma'}\right)^2.$$

Il suffit de comparer à l'équation (11) pour reconnaître que $-\frac{1}{\sigma'}$ est bien une solution particulière de cette équation.

16. L'équation en σ appartient au groupe des équations de la forme

$$\frac{d\sigma}{dt} = a + 2b\sigma + c\sigma^2, \tag{13}$$

où a, b, c sont des fonctions quelconques de t. Ce sont les plus simples après les équations linéaires. Comme on les rencontre fréquemment dans les applications, on leur a donné le nom de Riccati, parce qu'elles comprennent comme cas particulier l'équation

$$\frac{d\sigma}{dt} = a\sigma^2 + bt^m,$$

qui, seule, a été l'objet des recherches du géomètre italien. Nous allons rappeler rapidement leurs principales propriétés.

D'abord, elles ne changent pas de forme quand on effectue sur σ une substitution linéaire, c'est-à-dire quand on substitue à σ la variable λ définie par l'équation

$$\lambda = \frac{P\sigma + Q}{R\sigma + S},$$

où P, Q, R, S sont des fonctions quelconques de t.

En second lieu, on peut les intégrer dès que l'on en connaît

une solution particulière. Soit, en effet, $\sigma = \sigma_0$ une telle solution. Posons

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{\lambda},$$

et nous obtiendrons pour λ l'équation linéaire

$$(14)\qquad \frac{d\lambda}{dt} = -c - 2(c\sigma_0 + b)\lambda,$$

dont l'intégration exigera seulement deux quadratures effectuées successivement.

De là résulte une des propriétés fondamentales de l'équation de Riccati. Comme la valeur générale de λ est linéaire par rapport à la constante arbitraire C et de la forme

$$\mathrm{PC} + \mathrm{Q},$$

on voit que l'intégrale générale de l'équation de Riccati sera de la forme

$$\sigma = \frac{\mathrm{RC} + \mathrm{S}}{\mathrm{PC} + \mathrm{Q}},$$

P, Q, R, S étant des fonctions de la variable indépendante de t. On déduit de là que *le rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation est constant et égal à celui des quatre valeurs de la constante arbitraire correspondantes à ces solutions.*

17. Si donc on connaît trois solutions particulières $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, l'intégrale générale sera donnée par la formule

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} : \frac{\sigma - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \mathrm{C},$$

qui ne contient aucune quadrature.

Si l'on connaît seulement deux solutions σ_0, σ_1, une seule quadrature suffira. Voici le procédé le plus rapide pour obtenir la solution. Posons

$$\lambda = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma - \sigma_1},$$

on aura

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = +\frac{1}{\sigma - \sigma_0}\left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\sigma_0}{dt}\right) - \frac{1}{\sigma - \sigma_1}\left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d\sigma_1}{dt}\right)$$

ou, en remplaçant $\frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\sigma_0}{dt}, \frac{d\sigma_1}{dt}$ par leurs valeurs tirées de l'équation (13),

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = c(\sigma_0 - \sigma_1);$$

λ s'obtiendra donc par une simple quadrature, et l'on aura

$$(15) \qquad \lambda = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma - \sigma_1} = \mathrm{C}e^{\int c(\sigma_0-\sigma_1)dt},$$

C désignant une constante arbitraire.

L'équation de Riccati possède donc une des propriétés fondamentales des équations linéaires et la connaissance de chaque solution particulière permet de faire un pas vers la solution générale. Et, en effet, il est aisé de ramener son intégration à celle d'une équation linéaire du second ordre.

Voici le procédé qui nous paraît le plus élégant pour démontrer cette dernière proposition.

18. Posons

$$\sigma = \frac{\mu}{\nu},$$

l'équation deviendra

$$\nu\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\nu}{dt} = a\nu^2 + 2b\mu\nu + c\mu^2,$$

et cette unique équation peut évidemment être remplacée par les deux suivantes

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \quad a\nu + (b+h)\mu, \\ \frac{d\nu}{dt} &= -c\mu - (b-h)\nu, \end{aligned} \right.$$

où h désigne une fonction que l'on choisira arbitrairement ([1]).

([1]) Il est bon de remarquer que, si l'intégration complète du système (16) entraîne celle de l'équation de Riccati sans qu'il soit nécessaire d'effectuer une quadrature, la réciproque n'est pas vraie. L'intégration de l'équation de Riccati une fois effectuée, on a seulement le rapport $\frac{\mu}{\nu}$; la détermination de μ ou de ν par les équations (16) exige encore une quadrature.

Or l'élimination de μ ou de ν conduit, évidemment, à une équation linéaire du second ordre.

Si l'on prend, par exemple, $h = b$, on aura

$$\mu = -\frac{1}{c}\frac{d\nu}{dt},$$

et ν satisfera à l'équation

$$(17) \qquad \frac{d^2\nu}{dt^2} - \left(2b + \frac{c'}{c}\right)\frac{d\nu}{dt} + ac\nu = 0.$$

Si ν_1 et ν_2 désignent deux solutions particulières de cette équation, on aura

$$(18) \qquad \sigma = -\frac{1}{c}\frac{\nu'_1 + C\nu'_2}{\nu_1 + C\nu_2},$$

C désignant une constante arbitraire.

19. Nous avons vu que le rapport anharmonique de quatre solutions particulières quelconques de l'équation de Riccati est constant. Il est aisé d'établir que cette propriété est caractéristique, qu'elle appartient à cette seule équation.

En effet, si σ_0, σ_1, σ_2 sont trois solutions particulières, l'intégrale générale de l'équation considérée sera donnée par la formule

$$\frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma - \sigma_1} : \frac{\sigma_2 - \sigma_0}{\sigma_2 - \sigma_1} = C,$$

et l'élimination de C par une différentiation conduit à une équation de Riccati.

20. Appliquons ces propositions générales, relatives à l'équation de Riccati, à notre équation (11) en σ. Toutes les fois que l'on connaîtra une solution du système (1) pour laquelle la somme constante $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ sera différente de zéro, on pourra réduire cette somme à l'unité, et les formules (8) nous feront alors connaître deux solutions particulières de l'équation en σ. Désignons ces deux solutions par σ_0, $-\frac{1}{\sigma'_0}$. Il suffira, pour déterminer l'intégrale générale de l'équation en σ, d'effectuer une seule quadrature. L'application de la formule (15) nous conduira par des

transformations faciles à l'équation

$$\frac{\sigma-\sigma_0}{1+\sigma\sigma'_0} = Ce^{-\int\left(ir+\sigma'_0\frac{q-ip}{2}-\sigma_0\frac{q+ip}{2}\right)dt},$$

ou encore

$$\frac{\sigma-\sigma_0}{1+\sigma\sigma'_0} = C\sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma'_0}}e^{-\int\left(\frac{1+\sigma_0\sigma'_0}{4}\right)\left(\frac{q-ip}{\sigma_0}-\frac{q+ip}{\sigma'_0}\right)dt},$$

C désignant la constante arbitraire.

La quadrature qui figure dans ces formules porte sur une fonction réelle, toutes les fois que les rotations p, q, r et la solution particulière d'où l'on est parti sont réelles; car alors σ_0, σ'_0 seront imaginaires conjuguées, et la fonction sous le signe $\int$, dans les formules précédentes, sera de la forme $i\Theta$, Θ étant réelle.

Il est donc démontré que, toutes les fois que l'on connaîtra une solution particulière du système (1) pour laquelle la constante $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ sera différente de zéro, la solution générale de ce système s'obtiendra par une simple quadrature.

21. Supposons maintenant que les solutions particulières considérées α, β, γ satisfassent à la relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0.$$

Nous commencerons par remarquer que l'une au moins des quantités α, β, γ est imaginaire. On aura donc, en mettant en évidence les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\alpha=\alpha'+i\alpha'', \qquad \beta=\beta'+i\beta'', \qquad \gamma=\gamma'+i\gamma''.$$

Cela posé, si p, q, r sont des fonctions réelles de t, α', β', γ' et α'', β'', γ'' constitueront évidemment deux systèmes différents de solutions réelles du système (1), pour lesquels la somme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ sera différente de zéro. L'application des formules (6) fera connaître alors, sans intégration nouvelle, la solution complète du système (1).

Supposons maintenant que p, q, r soient des fonctions imaginaires. On pourra poser

(19) $$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma} = -x = \frac{\gamma}{\alpha-i\beta},$$

et, en introduisant un facteur de proportionnalité ρ, on aura

$$(20) \qquad \alpha = \rho(1 - x^2), \qquad \beta = i\rho(1 + x^2), \qquad \gamma = 2\rho x.$$

La substitution de ces valeurs dans le système (1) nous conduit aux deux équations

$$(21) \qquad \frac{dx}{dt} = -irx + \frac{q - ip}{2} + \frac{q + ip}{2}x^2,$$

$$(22) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = ir - (q + ip)x.$$

Ainsi, x devra être une solution de l'équation (11). D'ailleurs, si l'on pose

$$\sigma = x + \frac{1}{\lambda},$$

cette équation prendra la forme

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{q + ip}{2} + [ir - (q + ip)x]\lambda$$

ou, en tenant compte de la formule (22),

$$(23) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) = \frac{q + ip}{2\rho}.$$

On aura donc λ et, par conséquent, σ par une seule quadrature; donc, *dans tous les cas, la connaissance d'un seul système de solutions des équations* (1) *permet d'obtenir, par une seule quadrature, l'intégration complète de ces équations.*

Les systèmes particuliers de solutions pour lesquels la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est nulle jouent un rôle essentiel dans les importants travaux de M. Hermite sur la rotation d'un corps solide ([1]).

22. Euler, qui a, le premier, étudié le mouvement d'un corps solide, a démontré le résultat précédent par une méthode toute différente. Nous avons vu qu'il a exprimé les neuf cosinus au moyen de trois angles seulement, et nous savons que les rotations p, q, r s'expriment en fonction de ces angles et de leurs dérivées par rapport au temps par les formules (6) [p. 5]. Si donc on suppose

---

([1]) Hermite, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1885.

connues les rotations, ces trois formules constitueront un système d'équations différentielles qui remplacera le système (1) et suffira à déterminer les angles θ, φ, ψ. A la vérité, le défaut de symétrie de ces équations ne permet guère de les employer d'une manière générale; cependant on en déduit très simplement la propriété fondamentale du système (1).

En effet, soient a'', b'', c'' les valeurs particulières, supposées connues, de α, β, γ, vérifiant le système (1). Si nous prenons pour axe OZ la droite dont les cosinus directeurs sont a'', b'', c'', nous aurons alors θ et φ par les trois dernières formules (2) [p. 3]. Ensuite la dernière des formules (6), ou la seconde des formules (7) [p. 5], nous permettra de déterminer ψ par une quadrature. Connaissant les trois angles d'Euler, nous aurons trois solutions particulières du système (1) et, par conséquent, aussi la solution générale.

Il est aisé de voir que les quadratures à effectuer dans les deux méthodes se ramènent l'une à l'autre et ne diffèrent que par des quantités exactement intégrables.

CHAPITRE III.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉTHODE DÉVELOPPÉE DANS LE CHAPITRE PRÉCÉDENT.

Étude des coordonnées symétriques dans le cas de la sphère. — Interprétation géométrique d'une substitution linéaire effectuée simultanément sur les deux coordonnées. — Formules d'Euler et d'Olinde Rodrigues relatives à la transformation des coordonnées. — Représentation de la variable imaginaire par un point de la sphère suivant la méthode de Riemann.

---

23. D'après les développements précédents, on voit que l'intégration de tout système d'équations linéaires à trois inconnues, admettant une intégrale homogène du second degré, se ramène à celle d'une équation de Riccati, c'est-à-dire à celle du système linéaire le plus général à deux inconnues. Il nous paraît intéressant de justifier et d'expliquer ce résultat par quelques considérations de Géométrie pure. Pour cela, nous allons faire une étude rapide du système des coordonnées curvilignes x, y, qui déterminent les points de la sphère de rayon 1, et qui sont définies par les formules (9).

Par un calcul élémentaire, ces formules nous conduisent à la relation suivante

$$(1) \qquad d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{4\, dx\, dy}{(x-y)^2},$$

qui fait connaître la différentielle de l'arc décrit par le point de coordonnées curvilignes x, y. On voit que cet arc sera nul quand on se déplacera sur l'une ou l'autre des génératrices rectilignes de la sphère : c'est là un résultat bien connu ; mais la formule (1) va nous conduire à d'autres conséquences.

24. Son second membre jouit de la propriété de se reproduire quand on soumet x et y à une même substitution linéaire. Posons en effet

$$(2) \qquad x = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \qquad y = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d},$$

a, b, c, d étant des constantes; nous trouverons

$$\frac{4\,dx\,dy}{(x-y)^2} = \frac{4\,dx_1\,dy_1}{(x_1-y_1)^2}.$$

Il résulte de là que, si l'on considère sur la sphère deux figures décrites, l'une (F) par le point (x, y), l'autre (F_1) par le point (x_1, y_1), la distance de deux points infiniment voisins quelconques de l'une des figures sera égale à la distance des points correspondants de l'autre; par conséquent les triangles infiniment petits, qui se correspondent dans les deux figures, ayant leurs trois côtés égaux, seront égaux ou symétriques, et *les deux figures seront égales ou symétriques :* je dis qu'elles sont égales.

En effet, dans les formules (2), faisons varier a, b, c, d d'une manière continue de leurs valeurs actuelles aux valeurs suivantes : 1, 0, 0, 1. La figure (F_1) se déplacera d'une manière continue; et, comme elle est toujours égale ou symétrique à (F), elle demeurera toujours superposable à sa position primitive. Or, pour les valeurs extrêmes de a, b, c, d, la substitution (2) se réduit à la suivante :

$$x = x_1, \qquad y = y_1.$$

La figure (F_1) est venue coïncider avec (F) et, par conséquent, les deux figures sont égales.

Le second membre de la formule (1) se reproduirait aussi si l'on employait la substitution

$$(3) \qquad x = \frac{ay_1 + b}{cy_1 + d}, \qquad y = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}.$$

Mais il est clair que cette substitution résulte de la composition de la substitution (2), qui remplace toute figure (F) par une figure égale, avec la suivante :

$$x = y_1, \qquad y = x_1.$$

Il suffit de se reporter aux formules (9) [p. 12] pour reconnaître que cette dernière substitution remplace un point de la sphère par le point diamétralement opposé, c'est-à-dire la figure (F) par une figure symétrique; il en sera donc de même de la substitution plus générale définie par les formules (3).

25. Les résultats précédents ont été déduits de l'équation (1) qui

donne la distance de deux points infiniment voisins. Mais on peut aussi les obtenir par l'emploi de la formule qui exprime, dans le système de coordonnées x, y, la distance de deux points quelconques de la sphère.

Soient, en effet, M, M' deux points de coordonnées x, y; x', y'. On aura, en désignant par MM' l'arc de grand cercle qui les réunit,

$$(4) \qquad \cos \mathrm{MM'} = \frac{2xy + 2x'y' - (x+y)(x'+y')}{(x-y)(x'-y')};$$

d'où l'on déduira

$$(5) \quad \cos^2 \frac{\mathrm{MM'}}{2} = \frac{(x-x')(y-y')}{(x-y)(x'-y')}, \qquad \sin^2 \frac{\mathrm{MM'}}{2} = \frac{(x-y')(y-x')}{(x-y)(y'-x')},$$

Ces formules, que j'ai déjà données avec plusieurs autres en 1872 ([1]), peuvent encore s'écrire sous la forme

$$\cos^2 \frac{\mathrm{MM'}}{2} = \mathrm{R}(x, y', x', y), \qquad \sin^2 \frac{\mathrm{MM'}}{2} = \mathrm{R}(x, x', y', y),$$

$\mathrm{R}(a, b, c, d)$ désignant le rapport anharmonique des quantités a, b, c, d. Il est clair que ces expressions demeurent invariables quand on applique aux coordonnées des deux points l'une ou l'autre des substitutions (2) ou (3). On voit que ces substitutions ne changent pas la distance sphérique de deux points quelconques; elles ne peuvent donc que remplacer une figure (F) par une figure égale ou symétrique, ce qui confirme la proposition déjà obtenue.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on considère quatre points quelconques M, M', M'', M''' à la surface de la sphère, le rapport anharmonique des valeurs de la coordonnée x relatives à ces quatre points demeurera constant quand on déplacera d'une manière quelconque la figure invariable formée par ces quatre points; en d'autres termes, ce rapport anharmonique ne dépend que de la forme du quadrilatère. On en connaît différentes expressions que je ne m'arrêterai pas à établir. Il nous suffira de savoir qu'il demeure constant quand le quadrilatère se déplace sans se déformer.

([1]) G. Darboux, *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 212.

26. D'après cela, revenons au système (1) du Chapitre précédent et considérons-y α, β, γ comme les coordonnées d'un point de la sphère. A chaque solution particulière du système (1) correspondra sur la sphère une certaine courbe décrite par ce point. Il résulte des propositions établies tout d'abord (n° **14**) que, si deux points de la sphère représentent deux solutions particulières différentes du système, ils demeurent toujours à une distance invariable l'un de l'autre; donc, si quatre points décrivent dans leur mouvement les courbes qui correspondent à quatre solutions particulières différentes, ils formeront une figure invariable, et le rapport anharmonique des quatre valeurs particulières de x qui correspondent à ces quatre points sera constant; c'est dire que x, considéré comme fonction de t, devra satisfaire à une équation de Riccati (n° **19**).

Il nous reste à expliquer pourquoi la seconde coordonnée y satisfait à la même équation que la première. Pour cela, il suffit de remarquer que, si un point M de la sphère donne une solution du système (1), il en sera de même du point diamétralement opposé, qui correspond à des valeurs de α, β, γ changées de signe. Or on passe d'un de ces points à l'autre en échangeant x et y; ces coordonnées doivent donc satisfaire à la même équation différentielle.

27. Les résultats analytiques du Chapitre précédent sont ainsi complètement expliqués. Nous ne poursuivrons pas maintenant l'étude complète du système de coordonnées x, y, et nous nous contenterons d'indiquer comment on détermine le déplacement correspondant à une substitution linéaire effectuée simultanément sur les deux coordonnées.

Reprenons les formules

$$\alpha = \frac{1 - xy}{x - y}, \qquad \beta = i\frac{1 + xy}{x - y}, \qquad \gamma = \frac{x + y}{x - y}, \tag{6}$$

qui donnent les coordonnées rectangulaires α, β, γ en fonction de x, y. Si l'on effectue sur x et sur y la substitution définie par les formules

$$x = \frac{mx_1 + n}{px_1 + q}, \qquad y = \frac{my_1 + n}{py_1 + q} \tag{7}$$

et si l'on désigne par α_1, β_1, γ_1 les coordonnées rectangulaires qui correspondent à x_1, y_1, on trouvera, après un calcul qui

n'offre aucune difficulté,

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = a\alpha + a'\beta + a''\gamma, \\ \beta_1 = b\alpha + b'\beta + b''\gamma, \\ \gamma_1 = c\alpha + c'\beta + c''\gamma, \end{cases}$$

a, b, c, ... ayant les valeurs suivantes

$$(9)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{q^2+m^2-n^2-p^2}{2B}, & b = i\dfrac{m^2+n^2-p^2-q^2}{2B}, & c = \dfrac{pq-mn}{B}, \\ a' = i\dfrac{q^2+n^2-m^2-p^2}{2B}, & b' = \dfrac{m^2+n^2+p^2+q^2}{2B}, & c' = i\dfrac{pq+mn}{B}, \\ a'' = \dfrac{nq-mp}{B}, & b'' = -i\dfrac{mp+nq}{B}, & c'' = \dfrac{mq+np}{B}, \end{cases}$$

où B est le déterminant de la substitution

$$B = mq - np.$$

Il est aisé de reconnaître que ces neuf quantités sont les coefficients d'une substitution orthogonale, de déterminant 1, ce qui démontre une fois de plus le théorème établi plus haut (n° **24**).

Si l'on remplace m, n, p, q par les expressions suivantes

$$m = -\rho + i\nu, \qquad n = -\mu + i\lambda,$$
$$q = -\rho - i\nu, \qquad p = \mu + i\lambda,$$

en posant, pour abréger,

$$(10)\qquad B = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2,$$

on trouve

$$(11)\qquad \begin{cases} Ba = \rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2, & Bb = 2(\mu\lambda+\rho\nu), & Bc = 2(\lambda\nu-\rho\mu), \\ Ba' = 2(\mu\lambda-\nu\rho), & Bb' = \rho^2+\mu^2-\lambda^2-\nu^2, & Bc' = 2(\mu\nu+\lambda\rho), \\ Ba'' = 2(\nu\lambda+\mu\rho), & Bb'' = 2(\mu\nu-\lambda\rho), & Bc'' = \rho^2+\nu^2-\lambda^2-\mu^2. \end{cases}$$

Ce sont, sous forme homogène, les expressions bien connues des neuf cosinus, dues à Euler et à Olinde Rodrigues.

28. Puisque les formules (7) définissent un déplacement réel ou imaginaire, c'est-à-dire une rotation finie, proposons-nous de déterminer l'axe et la grandeur de cette rotation. On obtient ces deux éléments de la manière suivante :

Les points où l'axe de rotation vient rencontrer la sphère de-

meurent immobiles dans le mouvement. Ils doivent donc satisfaire aux relations

$$x = x_1, \quad y = y_1;$$

par conséquent x, y seront les racines de l'équation

$$(12) \qquad px^2 + (q - m)x - n = 0,$$

qui définit les éléments doubles de la substitution linéaire. Soient x', y' les deux racines, que nous supposerons différentes, de cette équation. On voit que le mouvement laissera invariables les quatre points

$$(13) \qquad \begin{cases} x = x', & x = y', & x = x', & x = y'; \\ y = y', & y = x', & y = x', & y = y'. \end{cases}$$

Les deux premiers sont à distance finie et diamétralement opposés : ce sont les points où l'axe de rotation coupe la sphère. Les deux autres satisfont à la relation $x = y$, et, par conséquent, d'après les formules (6), ils sont sur le cercle de l'infini. De là résulte cette définition d'un déplacement au point de vue projectif. C'est une transformation homographique de la sphère laissant invariables quatre points dont deux sont à l'infini, et dont les deux autres sont diamétralement opposés. Ces quatre points forment les sommets d'un quadrilatère gauche, entièrement situé sur la sphère.

Quant à la grandeur de la rotation, on la déterminera de la manière suivante. Écrivons les équations (7) sous la forme canonique

$$(14) \qquad \frac{x - x'}{x - y'} = k\frac{x_1 - x'}{x_1 - y'}, \qquad \frac{y - x'}{y - y'} = k\frac{y_1 - x'}{y_1 - y'}.$$

Cette forme se conservera évidemment si l'on effectue un déplacement d'ensemble, c'est-à-dire si l'on soumet toutes les variables $x, y, x', \ldots$ *à la même substitution linéaire*. Supposons que ce déplacement ait été choisi de telle manière que le point $x = x'$, $y = y'$ vienne se placer sur la partie positive de l'axe des z; alors x' deviendra égal à ∞, y' à 0 et les formules (14) deviendront

$$(15) \qquad x_1 = kx, \qquad y_1 = ky$$

ou, en revenant aux coordonnées rectangulaires et appelant α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 les coordonnées rectilignes de deux positions correspondantes du même point

$$\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{1 - \gamma_1} = k\frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma}, \qquad \frac{\alpha_1 - i\beta_1}{1 + \gamma_1} = \frac{1}{k}\,\frac{\alpha - i\beta}{1 + \gamma}.$$

Ces formules conviennent évidemment à une rotation autour de

Oz, d'un angle θ défini par l'équation

$$(16) \qquad e^{i\theta} = k.$$

On le reconnaît immédiatement en considérant les points du plan des xy pour lesquels on a

$$\gamma = \gamma_1 = 0.$$

Ainsi la grandeur de la rotation sera déterminée sans ambiguïté par la formule (16). Quant à la valeur de k, elle est donnée, comme on sait, par l'équation

$$(17) \qquad k = \frac{m - px'}{m - py'}$$

ou, si l'on veut l'obtenir sans passer par les valeurs de x', y', par l'équation

$$(18) \qquad \frac{(1+k)^2}{k} = \frac{(m+q)^2}{mq - np}.$$

29. Le déplacement défini par les formules (7) n'est pas réel, en général; mais les différentes méthodes précédentes permettent d'indiquer à quelles conditions ce déplacement sera réel. En effet, nous avons vu que, si deux points réels ont pour coordonnées x, y et x_1, y_1 respectivement, les variables imaginaires x, x_1 auront pour conjuguées $-\frac{1}{y}$, $-\frac{1}{y_1}$. En changeant donc i en $-i$ dans la première équation (7) et désignant par m_0, n_0, p_0, q_0 les quantités conjuguées de m, n, p, q, on devra avoir

$$-\frac{1}{y} = \frac{-m_0 + n_0 y_1}{-p_0 + q_0 y_1},$$

et cette relation, devant avoir lieu toutes les fois que x, y sont les coordonnées d'un point réel, devra nécessairement être identique à la seconde des formules (7). Cela donne les conditions

$$\frac{p_0}{n} = \frac{-q_0}{m} = \frac{-m_0}{q} = \frac{n_0}{p},$$

qui permettent d'écrire les formules (7) sous la forme

$$(19) \qquad x = \frac{mx_1 + n}{-n_0 x_1 + m_0}, \qquad y = \frac{my_1 + n}{-n_0 y_1 + m_0},$$

m_0, n_0 désignant les imaginaires conjuguées de m et de n.

30. Il est facile de reconnaître que, lorsque, suivant la méthode de Riemann, on représente une variable imaginaire par un point

de la sphère, la quantité que nous désignons par x est l'affixe du point (α, β, γ).

En effet, la méthode de Riemann consiste à représenter d'abord la variable $z = x' + iy'$ par le point (x', y') dans le plan des xy, comme l'ont fait Gauss et Cauchy; puis à faire la projection stéréographique de ce plan sur la sphère de rayon 1 qui a son centre à l'origine, en prenant pour pôle le point de cette sphère situé sur la partie positive de l'axe des z. Si nous désignons par α, β, γ les coordonnées de cette projection stéréographique, un calcul élémentaire nous donne

$$x = \frac{\alpha + i\beta}{1 - \gamma} = x' + iy' = z,$$

ce qui justifie notre remarque.

31. Dans la théorie des fonctions et dans différentes recherches de Géométrie, il peut être avantageux de modifier légèrement le système de coordonnées x, y et de substituer à y la variable

$$x_0 = -\frac{1}{y}.$$

On a alors pour α, β, γ les expressions

$$(20) \qquad \alpha = \frac{x + x_0}{1 + xx_0}, \qquad \beta = i\,\frac{x_0 - x}{1 + xx_0}, \qquad \gamma = \frac{xx_0 - 1}{xx_0 + 1},$$

et l'équation (1) prend la forme

$$(21) \qquad d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{4\,dx\,dx_0}{(1 + xx_0)^2}.$$

Avec ce nouveau système, les coordonnées x, x_0 de tout point réel sont imaginaires conjuguées; mais, d'autre part, un déplacement n'est plus représenté par *la même* substitution linéaire effectuée sur les deux variables [1].

---

[1] Pour tout ce qui concerne les relations entre les déplacements et les substitutions linéaires, on pourra consulter les importants Mémoires de M. F. Klein, insérés dans les tomes IX à XII des *Mathematische Annalen,* où ces relations se trouvent approfondies et appliquées à la solution de plusieurs problèmes du plus haut intérêt.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Extension de la théorie de Poinsot. — Détermination des mouvements dans lesquels il y a deux relations, données à l'avance, entre les rotations. — Détermination des courbes gauches dont la courbure et la torsion satisfont à une relation donnée. — Étude du cas où cette relation est linéaire. — Courbes à torsion constante.

---

32. Avant de continuer l'exposition de la théorie générale, nous allons faire quelques applications des propositions qui précèdent. Reprenons le système

$$(1)\qquad \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p,$$

auquel satisfont les cosinus des angles que fait une droite fixe avec les axes mobiles. On sait que, lorsqu'un corps solide se meut autour d'un point fixe sans être soumis à l'action d'aucune force, le système précédent est vérifié si l'on substitue à α, β, γ les dérivées $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, $\frac{\partial f}{\partial r}$ d'une fonction $f(p, q, r)$, homogène et du second degré, qui représente la demi-force vive totale du corps.

Cherchons tous les mouvements jouissant d'une propriété analogue, c'est-à-dire pour lesquels le système (1) admet la solution

$$(2)\qquad \alpha = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial q}, \qquad \gamma = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Mais ici $f(p, q, r)$ ne sera plus assujettie à être homogène et du second degré. Comme α, β, γ et les dérivées de f se transforment par la même substitution, quand on effectue un changement des axes mobiles, il est évident que la propriété précédente est indépendante du choix des axes.

En écrivant que le système (1) est vérifié par les valeurs (2) de

α, β, γ, nous aurons les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) &= r\frac{\partial f}{\partial q} - q\frac{\partial f}{\partial r},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) &= p\frac{\partial f}{\partial r} - r\frac{\partial f}{\partial p},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) &= q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q};\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$p\,d\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + q\,d\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) + r\,d\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0.$$

On a donc, en intégrant,

$$(4)\qquad p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + r\frac{\partial f}{\partial r} - f = \text{const.},$$

équation à laquelle il faut joindre la suivante

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

qui exprime que α, β, γ sont des cosinus directeurs.

En portant les valeurs de p, q tirées de ces équations (4) et (5) en fonction de r dans l'une des équations (3), on aura le temps par une quadrature. Après avoir obtenu ainsi les expressions de p, q, r en fonction du temps, on achèvera, au moyen d'une seule quadrature, l'intégration du système (1) dont on connaît déjà la solution particulière fournie par les équations (2).

La solution est, on le voit, toute pareille à celle que l'on a donnée dans l'étude du mouvement d'un corps solide abandonné à lui-même; mais l'analogie est plus complète encore, si l'on suppose que la fonction f soit homogène. Alors l'équation (4) se réduit à la suivante

$$f(p, q, r) = \text{const.},$$

et l'on peut représenter le mouvement en faisant rouler sur un plan fixe la surface invariablement liée aux axes mobiles dont l'équation, par rapport à ces axes, est

$$f(x, y, z) = 1.$$

Si l'on suppose que f soit entière et du second degré, on retrouve ainsi la solution de Poinsot.

33. Comme deuxième application, proposons-nous de déterminer les mouvements dans lesquels il y a deux relations données à l'avance

$$(6) \qquad f(p, q, r) = 0, \qquad \varphi(p, q, r) = 0,$$

entre les trois rotations. Nous allons donner d'abord une méthode géométrique indiquant le degré de difficulté de ce problème. Dans la représentation de Poinsot, le mouvement est obtenu si l'on fait rouler le cône (γ), lieu de l'axe instantané de rotation dans le corps mobile, sur un cône fixe (C). Or les deux équations précédentes, déterminant le lieu décrit dans le corps par l'extrémité de l'axe instantané, nous font connaître par cela même le cône (γ). Quant au cône (C), prenons-le arbitrairement, mais de telle manière que la section de ce cône, par la sphère de rayon 1, soit la développée sphérique d'une courbe arbitraire tracée sur cette sphère, ce qui permet d'obtenir l'arc de cette section sans aucune quadrature; puis faisons rouler le cône (γ) sur le cône (C). Les équations que nous aurons à écrire pour exprimer ce mouvement contiendront évidemment la quadrature qui donne l'arc de la courbe d'intersection du cône (γ) par la sphère de rayon 1. Pour une position quelconque du cône (γ), l'axe instantané sera la génératrice de contact de ce cône avec le cône (C), et les rapports de p, q, r seront connus. Les équations (6) nous feront donc connaître les grandeurs de ces rotations. En exprimant que le cône (γ) roule à chaque instant avec la vitesse ainsi obtenue, on aura à effectuer une nouvelle quadrature qui déterminera le temps.

Ainsi le calcul peut être dirigé de telle manière que l'on n'ait à effectuer que deux quadratures. On arrive à des résultats équivalents par la méthode analytique suivante.

34. Supposons trois des neuf cosinus, a, b, c par exemple, exprimés en fonction des deux variables x et y par les formules (6) [p. 33]. Si a, b, c sont réels, x et y seront des imaginaires de la forme

$$x = h + ki, \qquad y = -\frac{1}{h - ki}.$$

En exprimant que ces deux quantités vérifient l'équation de Riccati (11) [p. 13], on a deux relations; elles sont identiques à

celles que l'on obtient en substituant seulement la valeur de x et égalant les parties réelles et les parties imaginaires

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \quad rk + \dfrac{q}{2}(1 + h^2 - k^2) - phk, \\ \dfrac{dk}{dt} = -rh + qhk - \dfrac{p}{2}(1 + k^2 - h^2). \end{cases}$$

Éliminons p, q, r entre les équations (6) et (7), nous serons ainsi conduits à une équation de la forme

$$F\left(h,\ k,\ \frac{dh}{dt},\ \frac{dk}{dt}\right) = 0.$$

Et, si l'on prend pour k, par exemple, une fonction arbitraire de h, cette équation fera connaître le temps t par une quadrature. Nous connaissons trois des neuf cosinus, a, b, c. Une dernière quadrature nous fera connaître les six autres. Les résultats ainsi obtenus coïncident, on le voit, avec ceux que nous a fournis la méthode géométrique.

35. Nous avons vu que, si l'on considère une courbe gauche quelconque et si l'on étudie le mouvement du trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale en un point, on aura, en supposant que l'origine de ce trièdre décrit l'unité d'arc dans l'unité de temps,

$$p = -\frac{1}{\tau}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{\rho},$$

ρ et τ désignant les rayons de courbure et de torsion. Proposons-nous de déterminer toutes les courbes pour lesquelles il y a une relation donnée à l'avance entre la courbure et la torsion

$$f\left(\frac{1}{\tau},\ \frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Cela reviendra à déterminer le mouvement d'un trièdre dans lequel on a, entre les rotations, les deux relations

$$(8)\qquad q = 0, \qquad f(-p,\ r) = 0.$$

En appliquant la méthode générale donnée plus haut, on aura les expressions des neuf cosinus qui déterminent la position du trièdre mobile, en fonction de l'arc de la courbe qui, ici, est égal

au temps; puis, on déterminera les coordonnées rectangulaires x, y, z du point de la courbe, sommet du trièdre, par les formules

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = a', \qquad \frac{dz}{ds} = a'',$$

qui donneront

$$x = \int a\,ds, \qquad y = \int a'\,ds, \qquad z = \int a''\,ds.$$

36. La méthode que nous venons d'indiquer, et qui est générale, est susceptible de simplifications dans certains cas particuliers.

Supposons, par exemple, que l'on demande les courbes dont la torsion est constante. Les formules de M. Serret

$$\frac{dc}{ds} = \frac{b}{\tau}, \qquad \frac{dc'}{ds} = \frac{b'}{\tau}, \qquad \frac{dc''}{ds} = \frac{b''}{\tau}$$

nous donnent b, b', b'' en fonction des dérivées de c. Si l'on porte ces valeurs dans les relations entre les neuf cosinus

$$a = b'c'' - c'b'', \qquad a' = b''c - bc'', \qquad a'' = bc' - cb',$$

on trouve

$$a = \tau\left(c''\frac{dc'}{ds} - c'\frac{dc''}{ds}\right),$$
$$a' = \tau\left(c\frac{dc''}{ds} - c''\frac{dc}{ds}\right),$$
$$a'' = \tau\left(c'\frac{dc}{ds} - c\frac{dc'}{ds}\right).$$

On aura, par suite, pour les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, les formules

$$x = \int a\,ds = \tau\int(c''\,dc' - c'\,dc''),$$
$$y = \int a'\,ds = \tau\int(c\,dc'' - c''\,dc),$$
$$z = \int a''\,ds = \tau\int(c'\,dc - c\,dc'),$$

c, c', c'' étant trois fonctions d'une seule variable assujetties à l'unique condition

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

Si, par exemple, on pose

$$\frac{c}{h} = \frac{c'}{k} = \frac{c''}{l} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}},$$

on aura

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \tau\int\frac{l\,dk - k\,dl}{h^2+k^2+l^2},\\ y &= \tau\int\frac{h\,dl - l\,dh}{h^2+k^2+l^2},\\ z &= \tau\int\frac{k\,dh - h\,dk}{h^2+k^2+l^2}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules coïncident, aux notations près, avec celles que M. J.-A. Serret a données dans la 5e édition de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie de Monge,* p. 566.

37. Une méthode analogue s'applique à la détermination des courbes dont le rayon de première courbure est constant. Reprenons, en effet, les formules

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho}.$$

On en déduit

$$\frac{ds}{\rho} = \sqrt{da^2 + da'^2 + da''^2}$$

et, par conséquent,

$$dx = a\rho\sqrt{da^2 + da'^2 + da''^2}.$$

On aura donc, pour les trois coordonnées d'un point de la courbe cherchée,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \rho\int a\,d\sigma,\\ y &= \rho\int a'\,d\sigma,\\ z &= \rho\int a''\,d\sigma,\end{aligned}\right.$$

$d\sigma$ désignant la différentielle de l'arc de la courbe sphérique décrite par le point (a, a', a''). Le centre de courbure aura pour coordonnées les valeurs suivantes

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + b\,\rho = \rho\frac{da}{d\sigma} + \rho\int a\,d\sigma,\\ y_1 &= y + b'\rho = \rho\frac{da'}{d\sigma} + \rho\int a'\,d\sigma,\\ z_1 &= z + b''\rho = \rho\frac{da''}{d\sigma} + \rho\int a''\,d\sigma,\end{aligned}\right.$$

et il est aisé de vérifier, conformément aux résultats du n° 10,

que le lieu de ce point est aussi une courbe dont la première courbure est constante et égale à celle de la première.

38. Enfin, si l'on cherche les courbes jouissant de la propriété signalée par M. Bertrand (n° 8), et dont les deux courbures sont liées par l'équation

$$(12)\qquad \frac{m}{\rho} + \frac{n}{\tau} = 1,$$

on posera

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} ma + nc &= \alpha\sqrt{m^2 + n^2}, \\ ma' + nc' &= \alpha'\sqrt{m^2 + n^2}, \\ ma'' + nc'' &= \alpha''\sqrt{m^2 + n^2}, \end{aligned}\right.$$

α, α', α'' étant trois fonctions évidemment assujetties à la relation

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1.$$

Les formules de Serret

$$\frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho}, \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{\tau}$$

nous donneront, en tenant compte de la relation (12),

$$(14)\qquad \sqrt{m^2 + n^2}\,\frac{d\alpha}{ds} = b, \qquad \sqrt{m^2 + n^2}\,\frac{d\alpha'}{ds} = b', \qquad \sqrt{m^2 + n^2}\,\frac{d\alpha''}{ds} = b''.$$

Puis on aura

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} na - mc &= n(b'c'' - c'b'') - m(a'b'' - b'a'') \\ &= (m^2 + n^2)\left(\alpha''\frac{d\alpha'}{ds} - \alpha'\frac{d\alpha''}{ds}\right) \end{aligned}\right.$$

et de même

$$(15')\qquad \left\{\begin{aligned} na' - mc' &= (m^2 + n^2)\left(\alpha\frac{d\alpha''}{ds} - \alpha''\frac{d\alpha}{ds}\right), \\ na'' - mc'' &= (m^2 + n^2)\left(\alpha'\frac{d\alpha}{ds} - \alpha\frac{d\alpha'}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

Les relations (13) et (15) nous permettent de déterminer a, a',

a''; c, c', c'', et nous donnent

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\alpha + n\left(\alpha''\frac{d\alpha'}{ds} - \alpha'\frac{d\alpha''}{ds}\right),\\ a' &= \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\alpha' + n\left(\alpha\frac{d\alpha''}{ds} - \alpha''\frac{d\alpha}{ds}\right),\\ a'' &= \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\alpha'' + n\left(\alpha'\frac{d\alpha}{ds} - \alpha\frac{d\alpha'}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

Des formules (14), nous déduisons d'ailleurs

$$ds^2 = (m^2+n^2)(d\alpha^2 + d\alpha'^2 + d\alpha''^2).$$

On aura donc les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe par l'emploi des équations

$$x = \int a\,ds,\qquad y = \int a'\,ds,\qquad z = \int a''\,ds,$$

ce qui conduit au résultat définitif

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{d\alpha^2 + d\alpha'^2 + d\alpha''^2},\\ x &= m\int \alpha\,d\sigma + n\int(\alpha''\,d\alpha' - \alpha'\,d\alpha''),\\ y &= m\int \alpha'\,d\sigma + n\int(\alpha\,d\alpha'' - \alpha''\,d\alpha),\\ z &= m\int \alpha''\,d\sigma + n\int(\alpha'\,d\alpha - \alpha\,d\alpha'). \end{aligned}\right.$$

Suivant que l'on fera m ou n égal à zéro, on retrouvera les formules (9) ou (10); α, α', α'' sont d'ailleurs, nous l'avons vu, trois fonctions d'une seule variable assujetties à l'unique relation

$$(18)\qquad \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1.$$

Les formules précédentes s'établiraient aussi très aisément par l'emploi de la Géométrie.

39. Des trois systèmes (9), (10), (17), le plus simple est le système (9), qui détermine les courbes dont la torsion est constante. Nous allons les appliquer à la recherche de la courbe à torsion constante, dont l'indicatrice sphérique est une conique sphérique. On reconnaîtra aisément que, si par le centre de la sphère de rayon 1 on mène une parallèle à la binormale, cette parallèle coupera la sphère en un point dont les coordonnées seront c, c', c'', et qui décrira une ellipse sphérique supplémentaire de l'indicatrice sphérique.

En choisissant convenablement les axes, on pourra donc obtenir pour h, k, l les expressions très simples

$$h = \sqrt{\frac{a(a-\rho)}{(a-b)(a-c)}}, \quad k = \sqrt{\frac{b(b-\rho)}{(b-a)(b-c)}}, \quad l = \sqrt{\frac{c(c-\rho)}{(c-a)(c-b)}},$$

qui conviennent à la courbe située sur le cône

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0,$$

et, en portant ces valeurs de h, k, l dans les formules (9), on aura le système

$$(19) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\tau}{2}\sqrt{\dfrac{bc}{(a-b)(c-a)}}\displaystyle\int\frac{d\rho}{\sqrt{(b-\rho)(c-\rho)}}, \\ y = \dfrac{\tau}{2}\sqrt{\dfrac{ac}{(b-c)(a-b)}}\displaystyle\int\frac{d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(c-\rho)}}, \\ z = \dfrac{\tau}{2}\sqrt{\dfrac{ab}{(a-c)(c-b)}}\displaystyle\int\frac{d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(b-\rho)}}, \end{cases}$$

qui définit la courbe cherchée.

On ne connaît, croyons-nous, aucune courbe algébrique et réelle dont la torsion soit constante. Il serait intéressant d'examiner si toutes les courbes à torsion constante sont nécessairement transcendantes ou bien, s'il y en a d'algébriques, de déterminer les plus simples.

CHAPITRE V.

DES DÉPLACEMENTS A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

Relations différentielles entre les deux systèmes de rotations. Détermination du mouvement quand ces rotations sont connues. Application au cas où elles sont fonctions d'une seule variable.

---

40. Dans les Chapitres précédents, nous avons vu comment on rattache la théorie des courbes gauches à l'étude du mouvement d'un trièdre. D'autres recherches de Géométrie et, en particulier, celles qui se rapportent à la théorie des surfaces exigent que l'on considère des systèmes mobiles dont les différentes positions dépendent de deux paramètres distincts. Nous allons entreprendre l'étude de tels systèmes; et, pour étudier d'abord les propriétés des rotations, nous commencerons par supposer que le système mobile a un point fixe qui sera, comme précédemment, l'origine à la fois des axes fixes et des axes mobiles.

Alors les neuf cosinus qui déterminent la position des axes mobiles sont des fonctions de deux variables indépendantes, u et v. A partir de chacune de ses positions, le système mobile peut prendre une infinité de mouvements, qui correspondent aux différentes relations que l'on peut établir entre u et v. Nous introduirons ici deux systèmes différents de rotations. Les unes, que nous désignerons par p, q, r, se rapportent au déplacement dans lequel u varie seule. Elles donnent naissance au système

$$(1) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \beta r - \gamma q, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \gamma p - \alpha r, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial u} = \alpha q - \beta p,$$

qui devra admettre comme solutions particulières les trois cosinus de chaque groupe. Les autres, que nous désignerons par p_1, q_1, r_1, seront relatives au cas où v varie seule. Elles donnent également

naissance au système

$$(2) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \beta r_1 - \gamma q_1, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} = \gamma p_1 - \alpha r_1, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \alpha q_1 - \beta p_1,$$

tout semblable au premier. Il résulte immédiatement de là que, si l'on considère un déplacement du système dans lequel u et v sont des fonctions données de t, on aura

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta R - \gamma Q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \gamma P - \alpha R, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \alpha Q - \beta P,$$

P, Q, R ayant les valeurs

$$(3) \quad P = p\frac{du}{dt} + p_1\frac{dv}{dt}, \qquad Q = q\frac{du}{dt} + q_1\frac{dv}{dt}, \qquad R = r\frac{du}{dt} + r_1\frac{dv}{dt},$$

et, par conséquent, ces trois quantités P, Q, R seront les rotations relatives au mouvement considéré. Les projections sur les axes mobiles du chemin ou de l'arc infiniment petit décrit, dans ce mouvement, par un point dont les coordonnées relatives à ces axes seraient x, y, z, auront pour valeurs

$$(4) \quad \begin{cases} dx + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y, \\ dy + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z, \\ dz + (p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv)x. \end{cases}$$

Nous allons d'abord établir certaines équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les six rotations.

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\,\partial v}$ que l'on peut obtenir en différentiant les deux premières équations des systèmes (1) et (2). Nous aurons, après avoir remplacé les dérivées de β, γ par leurs valeurs tirées de ces deux systèmes,

$$\beta\left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} - pq_1 + qp_1\right) = \gamma\left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} - rp_1 + pr_1\right).$$

Comme cette relation doit avoir lieu quand on remplace β, γ, soit par b, c, soit par b', c', soit par b'', c'', il faudra que les coefficients de β et de γ soient nuls séparément. Nous aurons ainsi deux équations. En égalant de même les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \beta}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u\,\partial v}$ déduites des systèmes (1) et (2), on obtiendra une seule équation

nouvelle et l'on sera conduit au système

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, \end{cases}$$

qui joue un rôle fondamental dans la théorie [1].

41. Réciproquement toutes les fois que l'on connaîtra six quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1, satisfaisant aux équations (5), il existera un mouvement dans lequel ces six quantités seront les rotations. Pour établir ce résultat, il suffit évidemment de montrer que l'on peut obtenir des valeurs des neuf cosinus satisfaisant à la fois aux systèmes (1) et (2). La démonstration de cette proposition essentielle pourrait se déduire des théorèmes généraux relatifs aux équations aux dérivées partielles; mais on peut aussi l'obtenir directement de la manière suivante.

Je dis d'abord qu'en supposant les équations (5) satisfaites, on pourra déduire de tout système de valeurs (α, β, γ) satisfaisant aux équations (1), mais non aux équations (2), une solution nouvelle des équations (1).

Posons en effet

$$A = \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \beta r_1 + \gamma q_1,$$

$$B = \frac{\partial \beta}{\partial v} - \gamma p_1 + \alpha r_1,$$

$$C = \frac{\partial \gamma}{\partial v} - \alpha q_1 + \beta p_1.$$

Nous allons montrer que les quantités A, B, C, qui ne sont pas toutes nulles par hypothèse, vérifient les équations (1).

---

[1] Ces équations ont été obtenues (*Annales de l'École Normale*, t. IV, 1re série, p. 108) par M. Combescure qui a employé le premier des considérations cinématiques dans la démonstration des formules relatives à la théorie des surfaces et aux systèmes orthogonaux. Nous les avons données de notre côté, avant la publication du Mémoire de M. Combescure, dans le Cours que nous avons fait en 1866-67 comme suppléant de M. J. Bertrand, au Collège de France.

On a en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u} &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} - r_1 \frac{\partial \beta}{\partial u} + q_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \beta \frac{\partial r_1}{\partial u} + \gamma \frac{\partial q_1}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial v}(\beta r - \gamma q) - r_1 \frac{\partial \beta}{\partial u} + q_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \beta \frac{\partial r_1}{\partial u} + \gamma \frac{\partial q_1}{\partial u} \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial \beta}{\partial u}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial u}$ par leurs valeurs et tenant compte des équations (5),

$$\frac{\partial A}{\partial u} = Br - Cq. \tag{6}$$

On aura de même, en effectuant des permutations,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial u} &= Cp - Ar, \\ \frac{\partial C}{\partial u} &= Aq - Bp; \end{aligned} \right. \tag{6'}$$

et, par conséquent, A, B, C donnent bien une solution nouvelle du système (1). Le système (6), étant du premier degré par rapport aux dérivées des fonctions A, B, C, admet, évidemment, une seule solution pour laquelle les valeurs initiales de ces fonctions, correspondantes à une valeur donnée u_0 de u, sont des quantités A_0, B_0, C_0 données à l'avance ([1]). Et il est encore évident que, si ces valeurs initiales sont nulles, la solution unique qui leur correspond est celle qui est déterminée par les équations

$$A = B = C = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : *Si l'on connaît une solution du système* (1) *qui, portée dans les équations* (2), *satisfasse à ces équations quand on donne à u une valeur particulière* u_0, *elle y satisfera également pour toute valeur de u.*

([1]) La proposition que nous admettrons ici, et dans les développements qui vont suivre, à savoir que, lorsqu'un système d'équations différentielles du premier ordre est résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, il admet une seule solution pour laquelle les valeurs initiales des fonctions inconnues sont données, est due, comme on sait, à Cauchy qui l'a démontrée dans toute sa généralité. Elle admet, à la vérité, des exceptions, correspondantes aux cas où les dérivées des fonctions inconnues se présentent, en totalité ou en partie, sous une forme indéterminée ou infinie. Mais nous n'avons pas, évidemment, à nous préoccuper de ces cas d'exception dans les questions qui nous occupent.

42. Ce point étant établi, supposons qu'il s'agisse de trouver les solutions les plus générales communes à la fois aux équations (1) et (2). Nous allons voir qu'il existe une infinité de valeurs de α, β, γ satisfaisant à ces équations, et que chaque système de solutions communes est complètement déterminé si l'on donne les valeurs α_0, β_0, γ_0 de α, β, γ qui correspondent aux valeurs initiales u_0, v_0 de u et de v.

Supposons en effet que l'on remplace u par u_0 dans α, β, γ. Les solutions cherchées se réduiront à des fonctions de v, α', β', γ'. Or ces fonctions de v sont pleinement déterminées par la condition de satisfaire aux équations (2) où l'on a remplacé u par u_0, et d'admettre pour $v = v_0$ les valeurs initiales α_0, β_0, γ_0. D'autre part, α, β, γ sont des fonctions de u qui doivent satisfaire aux équations (1) et se réduire à α', β', γ' pour $u = u_0$. Elles sont donc, elles aussi, complètement déterminées par cette double condition, et il nous suffira de montrer que ces fonctions α, β, γ satisfont également au système (2).

Or ce fait est à peu près évident; car, si l'on remplace u par u_0, α, β, γ se réduisent alors à α', β', γ' et satisfont, pour cette valeur particulière de u, aux équations (2); par conséquent, elles y satisferont pour toutes les valeurs de u, d'après la proposition que nous venons de démontrer.

43. Il y a donc une infinité de systèmes différents de solutions communes et la solution la plus générale dépend, on le voit, de trois constantes arbitraires. D'autre part, si α, β, γ; α_1, β_1, γ_1 désignent deux systèmes différents de solutions, les fonctions

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$$

demeureront constantes pour toutes les valeurs de u et de v; la démonstration se fait ici comme dans le cas d'une seule variable. Par suite, si nous prenons trois systèmes différents de solutions a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', dont les valeurs initiales soient les neuf cosinus qui déterminent la position d'un trièdre trirectangle (T_0) par rapport aux axes fixes, on aura, pour toutes les valeurs de u et de v, des relations telles que les suivantes

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad aa' + bb' + cc' = 0,$$

et nos trois systèmes de solutions définiront, pour toutes les valeurs de u et de v, la position d'un trièdre mobile, trièdre pour lequel les rotations seront précisément les quantités données p, q, r; p_1, q_1, r_1.

Ici encore, comme dans le cas d'une seule variable, toutes les solutions que l'on peut obtenir se déduisent de l'une d'elles par un simple changement de coordonnées. On a toujours le même déplacement, mais il est rapporté à des axes différents.

44. Comme application, proposons-nous de rechercher les mouvements dans lesquels les six rotations dépendent de la seule variable v. Alors les équations (5) deviennent

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} = qr_1 - rq_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} = rp_1 - pr_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} = pq_1 - qp_1. \end{cases}$$

On déduit de là

$$p\frac{\partial p}{\partial v} + q\frac{\partial q}{\partial v} + r\frac{\partial r}{\partial v} = 0,$$

et par conséquent, h étant une constante,

$$p^2 + q^2 + r^2 = h^2.$$

On voit déjà que les systèmes (1) et (2) admettent la solution

$$\alpha = \frac{p}{h}, \qquad \beta = \frac{q}{h}, \qquad \gamma = \frac{r}{h}.$$

Nous pourrons prendre cette solution pour représenter a'', b'', c'', et, en nous servant des formules d'Euler, nous aurons

$$-\sin\theta\sin\varphi = \frac{p}{h}, \qquad -\sin\theta\cos\varphi = \frac{q}{h}, \qquad \cos\theta = \frac{r}{h},$$

ce qui montre déjà que θ et φ sont des fonctions de la seule variable v.

Si nous nous reportons aux formules (7) [p. 5] qui donnent

les rotations, nous avons ici

$$\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial u} = p \sin\varphi + q \cos\varphi,$$

$$\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial v} = p_1 \sin\varphi + q_1 \cos\varphi$$

et par conséquent

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -h, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = -\frac{pp_1 + qq_1}{h^2 - r^2} h,$$

ce qui donne

$$\psi = -hu + V,$$

V désignant une fonction de v. Réciproquement les formules (6) [p. 5] nous montrent que, si θ, φ ne contiennent pas u et si ψ ne le contient que linéairement, les six rotations seront bien des fonctions de la seule variable v.

45. Dans l'exemple précédent, les six rotations sont fonctions de l'une des variables indépendantes. Proposons-nous, d'une manière plus générale, de rechercher tous les cas dans lesquels elles sont fonctions d'une quelconque d'entre elles; alors p, q, r; p_1, q_1, r_1 pourront être regardées comme des fonctions d'une certaine variable θ, qui dépendra d'une manière quelconque des variables u et v.

Si nous désignons par p', q', ... les dérivées de p, q, ... par rapport à θ, les équations (5) nous donneront

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} p' \frac{\partial\theta}{\partial v} - p'_1 \frac{\partial\theta}{\partial u} &= qr_1 - rq_1, \\ q' \frac{\partial\theta}{\partial v} - q'_1 \frac{\partial\theta}{\partial u} &= rp_1 - pr_1, \\ r' \frac{\partial\theta}{\partial v} - r'_1 \frac{\partial\theta}{\partial u} &= pq_1 - qp_1. \end{aligned} \right.$$

Si, de deux quelconques de ces équations, on pouvait tirer les valeurs de $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, ces valeurs seraient de la forme

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = f(\theta), \quad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \varphi(\theta),$$

et ces deux équations conduiraient pour θ à une expression de la

forme

$$\theta = F(au + bv),$$

a et b étant deux constantes. En substituant aux variables u et v les suivantes

$$u_1 = au + bv, \qquad v_1 = av - bu,$$

on serait ramené au cas précédent.

Il nous reste donc à examiner seulement le cas où les équations (8) ne peuvent être résolues par rapport à $\frac{d\theta}{du}$, $\frac{d\theta}{dv}$, et où l'on a, par conséquent,

$$(9) \qquad \frac{p'}{p_1} = \frac{q'}{q_1} = \frac{r'}{r_1}, \qquad \frac{p'}{qr_1 - rq_1} = \frac{q'}{rp_1 - pr_1} = \frac{r'}{pq_1 - qp_1}.$$

On déduit d'abord de ces relations

$$p'p + q'q + r'r = 0,$$
$$p'_1 p_1 + q'_1 q_1 + r'_1 r_1 = 0,$$

et, en intégrant,

$$p^2 + q^2 + r^2 = \text{const.},$$
$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = \text{const.}$$

En multipliant les variables u et v par des constantes convenablement choisies, on pourra écrire

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$
$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = 1,$$

et, par conséquent, les extrémités (p, q, r), (p_1, q_1, r_1) des deux axes de rotation décrivent par rapport aux axes mobiles deux courbes (C), (C′) situées sur la sphère de rayon 1.

Il résulte des premières équations (9) que ces deux courbes ont pour chaque valeur de θ leurs tangentes parallèles. Ce sont donc deux courbes parallèles l'une à l'autre; et si l'on suppose, ce qui est évidemment permis, que l'on ait pris pour θ l'arc de la courbe (C) compté à partir d'une origine fixe, on pourra poser

$$(10) \qquad \begin{cases} p_1 = p\cos h + \sin h(qr' - rq'), \\ q_1 = q\cos h + \sin h(rp' - pr'), \\ r_1 = r\cos h + \sin h(pq' - qp'), \end{cases}$$

h étant un angle constant.

46. On peut déduire de ces résultats une représentation géométrique du mouvement. Considérons la courbe décrite dans l'espace par l'extrémité de l'un des axes instantanés : par exemple, par le point (p, q, r). Si l'on désigne par $a, b, c, a', \ldots$ les neuf cosinus qui déterminent la position du système mobile et par X, Y, Z les coordonnées de ce point relativement aux axes fixes, on aura

$$\begin{aligned} X &= ap + bq + cr, \\ Y &= a'p + b'q + c'r, \\ Z &= a''p + b''q + c''r. \end{aligned}$$

Différentions totalement la première de ces équations et remplaçons da, db, dc par leurs valeurs déduites des formules (1), (2). En substituant ensuite à p_1, q_1, r_1 leurs valeurs tirées des équations (10), nous obtiendrons

$$dX = (ap' + bq' + cr')d(\theta + v \sin h).$$

Cette formule nous montre que X, Y, Z dépendent d'une même variable, $\theta + v \sin h$. Par conséquent le pôle (X, Y, Z) décrira dans l'espace une courbe (Γ) tracée sur la sphère de rayon 1 et qui sera toujours en contact avec la courbe (C). Nous sommes ainsi conduit au résultat suivant :

Considérons sur la sphère de rayon 1 deux courbes (C) et (Γ). Si nous déplaçons la courbe (C) en l'assujettissant à rester tangente à la courbe (Γ), une courbe (C′) parallèle à (C) et entraînée dans son mouvement demeurera toujours tangente à une courbe fixe (Γ') parallèle à (Γ). Le déplacement des deux courbes (C) et (C′) est précisément celui que nous nous proposions de définir. Quand u varie seule, la courbe (C) roule avec une vitesse constante sur (Γ); et de même, quand v varie seule, (C′) roule sur (Γ'), avec une vitesse qui est aussi constante.

CHAPITRE VI.

INTÉGRATION SIMULTANÉE DES SYSTÈMES LINÉAIRES RENCONTRÉS DANS LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Réduction du problème à l'intégration simultanée de deux équations de Riccati. — Propositions diverses relatives à ces deux équations. — Autre méthode de solution reposant sur la détermination de a, a', a''.

---

47. Après avoir reconnu l'existence des solutions communes aux systèmes (1) et (2), nous allons indiquer comment on les déterminera. Comme on ne doit considérer, dans la question qui nous occupe, que les solutions pour lesquelles on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \tag{1}$$

on pourra exprimer α, β, γ en fonction des variables x, y par les formules (9) [p. 22], et, d'après les résultats obtenus au n° **15**, les variables x, y devront, l'une et l'autre, satisfaire aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial u} &= -ir\sigma+\frac{q-ip}{2}+\frac{q+ip}{2}\sigma^2,\\ \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= -ir_1\sigma+\frac{q_1-ip_1}{2}+\frac{q_1+ip_1}{2}\sigma^2, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

qui sont évidemment compatibles, comme les systèmes d'où on les a déduites.

48. Nous sommes ainsi amenés à ce problème d'Analyse : étudier l'intégration simultanée de deux équations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial u} &= a+2b\sigma+c\sigma^2,\\ \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= a_1+2b_1\sigma+c_1\sigma^2, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

où a, b, c; a_1, b_1, c_1 sont des fonctions données de u et de v

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \, \partial v}$ qu'on peut déduire de ces équations, on sera conduit à la relation

$$\begin{aligned} & 2(c\sigma + b)(a_1 + 2b_1\sigma + c_1\sigma^2) - 2(c_1\sigma + b_1)(a + 2b\sigma + c\sigma^2) \\ & \quad + \frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial a_1}{\partial u} + 2\sigma\left(\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b_1}{\partial u}\right) + \sigma^2\left(\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c_1}{\partial u}\right) = 0, \end{aligned}$$

qui est du second degré par rapport à σ.

Si cette relation n'a pas lieu identiquement, les deux équations (3) ne pourront admettre au plus que deux solutions communes. Donc, si l'on demande que le système (3) ait une solution contenant une constante arbitraire, il faudra que les coefficients des différentes puissances de σ dans l'équation précédente soient nuls, ce qui donne

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} - \dfrac{\partial a_1}{\partial u} + 2ba_1 - 2ab_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial v} - \dfrac{\partial b_1}{\partial u} + ca_1 - ac_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial v} - \dfrac{\partial c_1}{\partial u} + 2cb_1 - 2bc_1 = 0. \end{cases}$$

Ces relations, appliquées aux équations (2), reproduisent les formules (5) du Chapitre précédent; par conséquent nous pourrons les supposer vérifiées dans la suite de notre discussion.

49. Nous allons montrer réciproquement que, lorsque les coefficients a, b, c; a_1, b_1, c_1 satisfont aux conditions (4), les équations proposées (3) admettent une solution commune contenant une constante arbitraire. Pour cela, désignons par σ une solution quelconque de la première de ces équations, et posons

$$(5) \qquad \theta = \frac{\partial \sigma}{\partial v} - a_1 - 2b_1\sigma - c_1\sigma^2.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} - a - 2b\sigma - c\sigma^2 = 0.$$

Différentions l'équation précédente par rapport à v, l'équation (5) par rapport à u, et retranchons les deux relations ainsi obtenues. Nous aurons, en tenant compte des identités (4), aussi

bien que des deux équations précédentes,

$$(6) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial u} = 2(c\sigma + b)\theta,$$

ce qui donne, par l'intégration,

$$(7) \qquad \theta = \theta_0 e^{2\int_{u_0}^{u} (c\sigma + b)\,du},$$

θ_0 désignant la valeur de θ pour $u = u_0$. Si donc θ est nulle pour $u = u_0$, elle le sera pour toutes les valeurs de u.

Ce point étant établi, faisons $u = u_0$ dans la seconde des équations (3), et déterminons la fonction σ' de v qui satisfait à cette équation et se réduit à σ_0 pour $v = v_0$. On aura donc

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial v} = a_1 + 2b_1\sigma' + c_1\sigma'^2$$

pour $u = u_0$.

Considérons ensuite la première des équations (3), et déterminons la fonction σ qui satisfait à cette équation et se réduit à σ' pour $u = u_0$. D'après ce que nous venons de démontrer, cette fonction σ satisfera aux deux équations; car la valeur de la fonction que nous avons désignée par θ, relative à la solution ainsi déterminée, est nulle pour $u = u_0$, et, par conséquent, elle restera nulle pour toutes les valeurs de u. La fonction σ qui satisfait aux deux équations contient, d'ailleurs, la constante arbitraire σ_0.

Toutes les opérations que nous venons d'indiquer sont possibles et n'exigent aucune quadrature quand on sait intégrer séparément chacune des équations (3). Ainsi l'on saura déterminer, sans intégration, la solution commune aux deux équations quand on aura obtenu l'intégrale de chacune d'elles.

50. Nous allons maintenant démontrer quelques propositions qui rendent plus facile l'intégration simultanée des équations (3).

Supposons d'abord que l'on connaisse une solution commune de ces deux équations $\sigma = x$. En posant

$$\sigma = x + \frac{1}{\omega},$$

on sera ramené à deux équations linéaires de la forme

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = P\omega + Q,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = P_1\omega + Q_1.$$

et la valeur générale de ω s'obtiendra par la formule

$$\omega = e^{\int(P\,du+P_1\,dv)} \int e^{-\int(P\,du+P_1\,dv)} (Q\,du + Q_1\,dv), \tag{8}$$

qui ne contient, comme on s'en assure aisément, que des différentielles exactes.

Il est inutile de s'arrêter au cas où l'on aurait deux ou trois solutions communes; la méthode que nous avons suivie au n° 17 s'appliquera sans modification; mais il convient d'examiner l'hypothèse où l'on aurait pour l'une des équations une solution particulière *ne satisfaisant pas à l'autre*. Aux résultats déjà établis, on peut alors ajouter le suivant : *On peut déterminer, sans aucune quadrature, l'intégrale générale de celle des équations dont on connaît une solution particulière.*

Soit, par exemple, x une valeur de σ satisfaisant à la première équation et non à la seconde. Posons

$$\sigma = x + \frac{1}{\omega}.$$

Si nous portons cette valeur de σ dans la première équation (3), elle deviendra

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = -2(b + cx)\omega - c.$$

Introduisons la fonction θ, définie par l'équation (5) où l'on remplace σ par x, et qui, d'après la formule (6), vérifie l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = 2(b + cx)\theta.$$

L'équation à laquelle satisfait ω pourra être mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\omega\theta)}{\partial u} + c\theta = 0. \tag{9}$$

Or, un calcul facile conduit à l'identité

$$c\theta = \frac{\partial}{\partial v}(cx + b) - \frac{\partial}{\partial u}(c_1 x + b_1) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \log \theta}{\partial v} - c_1 x - b_1\right).$$

En substituant la valeur de $c\theta$ dans l'équation (9), nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\omega\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\theta}{\partial v} - c_1 x - b_1\right) = 0.$$

et, en intégrant,

$$(10) \qquad \omega\theta = \frac{\theta}{\sigma - x} = c_1 x + b_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\theta}{\partial v} + C,$$

C désignant la constante arbitraire qui peut être une fonction de v. La formule qui fait connaître l'intégrale générale de la première équation ne contient, comme nous l'avons annoncé, aucun signe de quadrature.

La proposition établie en dernier lieu, jointe à celles qui précèdent, nous permet de conclure que, si l'on connaît pour chacune des deux équations (3) une solution particulière ne satisfaisant pas à l'autre, il sera possible d'obtenir sans aucune quadrature les solutions générales de ces deux équations, *et par conséquent aussi leurs solutions communes.*

51. Nous montrerons, en terminant, comment on peut, en s'appuyant sur ce dernier résultat, former différentes équations différentielles dont l'intégration entraînerait celle du système (3) sans quadrature.

Ajoutons les équations (3), après les avoir multipliées par du et dv respectivement. Nous aurons

$$d\sigma - (a\,du + a_1\,dv) - 2(b\,du + b_1\,dv)\sigma - (c\,du + c_1\,dv)\sigma^2 = 0.$$

Envisageons maintenant les deux équations différentielles que nous formerons en remplaçant σ successivement par deux fonctions σ_1, σ_2 *choisies comme on le voudra*

$$(11) \quad \begin{cases} d\sigma_1 - a\,du - a_1\,dv - 2(b\,du + b_1\,dv)\sigma_1 - (c\,du + c_1\,dv)\sigma_1^2 = 0, \\ d\sigma_2 - a\,du - a_1\,dv - 2(b\,du + b_1\,dv)\sigma_2 - (c\,du + c_1\,dv)\sigma_2^2 = 0. \end{cases}$$

Supposons que l'on sache intégrer chacune de ces deux équa-

tions différentielles. Je dis que l'on saura alors intégrer, sans aucune quadrature, le système (3).

Soit, en effet,

$$\varphi(u, v) = \alpha$$

l'intégrale de la première équation (11) et

$$\psi(u, v) = \beta$$

celle de la seconde équation. Faisons un changement de variables, et substituons α, β à u et v. On aura, d'après la définition même de α et de β,

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial\beta} = a\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma_1 + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma_1^2, \\ \dfrac{\partial\sigma_2}{\partial\alpha} = a\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} - b_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma_2 + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma_2^2. \end{cases}$$

Quant au système (3), il prendra la forme

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial\beta} = a\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\beta}\right)\sigma^2, \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = a\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + a_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} + 2\left(b\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} - b_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma + \left(c\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + c_1\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\sigma^2. \end{cases}$$

Les équations (12) expriment que σ_1, σ_2 sont respectivement solutions particulières de la première et de la seconde équation (13); par conséquent, d'après ce que nous avons démontré, on pourra intégrer complètement le système (13), équivalent au système (3).

Pour faire une application de cette dernière proposition, revenons au système proposé des équations (2) et prenons

$$\sigma_1 = 1, \qquad \sigma_2 = -1;$$

les deux équations (11) deviendront ici

$$q\,du - q_1\,dv + i(r\,du + r_1\,dv) = 0,$$
$$q\,du + q_1\,dv - i(r\,du + r_1\,dv) = 0.$$

Ainsi l'intégration de ces deux équations entraînerait celle du système (2). Nous allons expliquer ce résultat en faisant connaître un moyen nouveau, et tout à fait différent de celui que nous venons d'étudier, pour aborder l'intégration du système des équations (1) et (2) du Chapitre précédent.

52. Désignons toujours par a, b, c, ... les neuf cosinus satisfaisant à ces équations (1) et (2). On aura

$$(14)\qquad \begin{cases} da = (br - cq)\,du + (br_1 - cq_1)\,dv, \\ db = (cp - ar)\,du + (cp_1 - ar_1)\,dv, \\ dc = (aq - bp)\,du + (aq_1 - bp_1)\,dv, \end{cases}$$

et les relations analogues que l'on obtiendrait en accentuant a, b, c. Si l'on joint à la première d'entre elles les équations qui donnent da', da'', on obtiendra, en faisant la somme des carrés,

$$(15)\qquad da^2 + da'^2 + da''^2 = (q\,du + q_1\,dv)^2 + (r\,du + r_1\,dv)^2.$$

Or a, a', a'', étant liés par l'équation

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$

sont les coordonnées d'un point d'une sphère, et il est même évident que cette sphère est celle qui est décrite par le point situé à la distance 1 sur l'axe mobile Ox. Si l'on considère, ici encore, cette sphère comme une surface réglée, et si l'on pose

$$(16)\qquad \frac{a + ia'}{1 - a''} = x, \qquad \frac{a - ia'}{1 - a''} = -\frac{1}{y},$$

l'équation (15) prendra la forme

$$(17)\qquad \frac{4\,dx\,dy}{(x - y)^2} = (q\,du + q_1\,dv)^2 + (r\,du + r_1\,dv)^2.$$

Si l'on peut déduire x, y de cette équation en fonction de u et de v, on aura a, a', a'' et les formules, telles que les suivantes

$$\frac{\partial a}{\partial u} = br - cq, \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = br_1 - cq_1,$$

feront connaître, par des calculs élémentaires, les six cosinus qui restent à déterminer. Ainsi tout se réduit à trouver les valeurs de x et de y, fonctions de u et de v, satisfaisant à l'équation (17).

Décomposons le second membre de cette équation en deux facteurs que nous égalerons à zéro. Nous aurons ainsi deux équations différentielles

$$(18)\qquad \begin{cases} q\,du + q_1\,dv + i(r\,du + r_1\,dv) = 0, \\ q\,du + q_1\,dv - i(r\,ds + r_1\,dv) = 0. \end{cases}$$

Soient

$$\varphi(u, v) = \alpha, \qquad \psi(u, v) = \beta \tag{19}$$

les intégrales de ces deux équations. Si nous faisons un changement de variables et si nous substituons à u et v les fonctions α, β, le second membre de la formule (17) prendra la forme

$$4\lambda\, d\alpha\, d\beta,$$

λ étant une fonction connue de α et de β, et l'équation à résoudre deviendra

$$\frac{dx\, dy}{(x-y)^2} = \lambda\, d\alpha\, d\beta. \tag{20}$$

Elle ne peut évidemment admettre que l'une des deux solutions suivantes

$$x = \mathrm{A}, \qquad y = \mathrm{B}$$

ou

$$x = \mathrm{B}, \qquad y = \mathrm{A},$$

A désignant une fonction de α, et B une fonction de β.

λ devra donc avoir pour valeur

$$\lambda = \frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2}, \tag{21}$$

et il faudra de cette équation déduire les valeurs de A et de B.

Si, par un procédé bien connu, on élimine les fonctions A et B, on verra que λ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha\, \partial \beta} = -2\lambda, \tag{22}$$

qui nous sera utile. Mais, si l'on veut obtenir l'expression de A ou de B, il se présente une difficulté tenant à ce que, d'après une remarque déjà faite, l'expression de λ ne change pas quand on remplace A et B respectivement par

$$\frac{m + n\mathrm{A}}{p + q\mathrm{A}}, \quad \frac{m + n\mathrm{B}}{p + q\mathrm{B}},$$

m, n, p, q étant des constantes. Il semble donc que l'expression la plus générale de A pouvant satisfaire à l'équation (21) devra contenir trois constantes et, par conséquent, ne pourra être dé-

terminée que par l'intégration d'une équation différentielle du troisième ordre.

Essayons, en effet, de déterminer A. En prenant la dérivée logarithmique par rapport à α des deux membres de l'équation (21), on a

$$\frac{A''}{A'} - \frac{2A'}{A-B} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial \alpha}. \tag{23}$$

Une nouvelle différentiation par rapport à α permettra d'éliminer B et conduira à l'équation

$$\frac{3A''^2}{A'^2} - \frac{2A'''}{A'} = 3\left(\frac{\partial \log \lambda}{\partial \alpha}\right)^2 - \frac{2}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha^2}. \tag{24}$$

Nous allons voir que l'intégration de cette équation s'effectue sans difficulté.

Le second membre, étant égal au premier, ne doit pas dépendre de β, et, par conséquent, ne changera pas quand on donnera à β une valeur constante quelconque β_0.

Soit λ_0 la valeur correspondante de λ; l'équation (24) admettra évidemment la solution

$$A' = \lambda_0, \qquad A = \int \lambda_0 \, d\alpha,$$

ou, en tenant compte de l'équation (22),

$$A = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \lambda_0}{\partial \beta_0};$$

et il suffira de porter cette valeur de A dans l'équation (23) pour en déduire la valeur correspondante de B.

53. Ainsi, toute la difficulté dans notre nouvelle méthode consiste dans l'intégration des deux équations (18); il est clair que, si l'on avait considéré de même b, b', b''; c, c', c'' au lieu de a, a', a'', on aurait eu à intégrer les deux équations de l'un des groupes suivants :

$$\left\{\begin{aligned} p\,du + p_1\,dv + i(r\,du + r_1\,dv) &= 0,\\ p\,du + p_1\,dv - i(r\,du + r_1\,dv) &= 0,\end{aligned}\right. \tag{25}$$

$$\left\{\begin{aligned} p\,du + p_1\,dv + i(q\,du + q_1\,dv) &= 0,\\ p\,du + p_1\,dv - i(q\,du + q_1\,dv) &= 0.\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Il y a évidemment le plus grand avantage à avoir le choix libre entre ces trois groupes différents.

54. Nous ajouterons encore une remarque de pure forme relative aux deux équations (3). *On peut ramener leur intégration simultanée à celle d'une seule équation de Riccati.* Supposons, en effet, qu'il s'agisse de trouver la solution commune de ces équations qui se réduit à σ_0 pour $u = u_0$, $v = v_0$. Posons

$$u = u_0 + u't, \quad v = v_0 + v't,$$

u', v' désignant des constantes; σ deviendra une fonction de t qui devra satisfaire à l'équation

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}u' + \frac{\partial\sigma}{\partial v}v' = au' + a_1 v' + 2(bu' + b_1 v')\sigma + (cu' + c_1 v')\sigma^2,$$

où les coefficients sont maintenant des fonctions de t.

Elle sera donc déterminée par cette condition, jointe à celle de se réduire à σ_0 pour $t = 0$. Supposons qu'on ait déterminé cette fonction

$$\sigma = F(u_0, v_0, u, v, t).$$

Il suffit d'y faire $t = 1$ et de remplacer u', v' respectivement par $u - u_0$, $v - v_0$ pour obtenir la solution cherchée.

En tenant compte de cette remarque purement théorique, on peut dire que *l'intégration simultanée des systèmes* (1) *et* (2) *du Chapitre précédent se ramène à celle d'une seule équation de Riccati.*

CHAPITRE VII.

DES DÉPLACEMENTS A DEUX VARIABLES DANS LE CAS OU LE SYSTÈME MOBILE N'A PAS DE POINT FIXE.

Introduction des six translations. — Relations différentielles auxquelles elles satisfont. — Mouvements infiniment petits qui se réduisent à des rotations. — Théorème de MM. Schönemann et Mannheim. — Cas particulier où il y a un centre instantané de rotation. — Théorème de M. Ribaucour.

---

53. Après avoir traité le cas où le système mobile a un point fixe, il nous reste à examiner l'hypothèse où le trièdre (T) se meut d'une manière quelconque dans l'espace : alors il faudra joindre aux six rotations six quantités nouvelles. Nous désignerons par ξ, η, ζ les composantes de la vitesse de l'origine des axes mobiles relativement à ces axes, quand u varie seule, et par ξ_1, η_1, ζ_1 les mêmes composantes quand v varie seule. Si l'on désigne par X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées de l'origine des axes mobiles par rapport aux axes fixes, on aura

$$(1) \qquad \frac{\partial X_0}{\partial u} = a\xi + b\eta + c\zeta, \qquad \frac{\partial X_0}{\partial v} = a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1,$$

et les équations analogues en Y_0, Z_0. Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 X_0}{\partial u\,\partial v}$ que l'on peut déduire de ces formules. Après avoir remplacé les dérivées des cosinus par leurs valeurs, nous obtiendrons une équation qui, devant avoir lieu quand on remplacera a, b, c par les autres systèmes a', b', c'; a'', b'', c'', se décomposera dans les trois suivantes (¹) :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial v} - \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} = q\zeta_1 - q_1\zeta - r\eta_1 + r_1\eta, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial v} - \dfrac{\partial\eta_1}{\partial u} = r\xi_1 - r_1\xi - p\zeta_1 + p_1\zeta, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial v} - \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial u} = p\eta_1 - p_1\eta - q\xi_1 + q_1\xi. \end{cases}$$

(¹) On pourra comparer avec les formules analogues données par M. Kirchhoff

56. Réciproquement, lorsque les douze quantités $\xi, p, \ldots$ satisferont aux équations (2), en même temps qu'aux équations (5) du Chapitre V, il existera un déplacement dans lequel elles seront les rotations et les translations; car nous savons déjà qu'on pourra déterminer les neuf cosinus; et de plus les équations (1), qui seront compatibles en vertu des équations (2), nous fourniront par des quadratures les coordonnées de l'origine des axes mobiles. Il est inutile de répéter ici que tous les mouvements obtenus se réduisent au fond à un seul, observé par rapport à des axes différents.

Il est évident que, si, au lieu de considérer toutes les positions du système mobile qui correspondent aux différentes valeurs de u et de v, on suppose que u et v soient des fonctions d'un seul paramètre α, les rotations et translations relatives à ce mouvement seront respectivement

$$(3)\quad \begin{cases} p\dfrac{du}{d\alpha}+p_1\dfrac{dv}{d\alpha}, & q\dfrac{du}{d\alpha}+q_1\dfrac{dv}{d\alpha}, \quad r\dfrac{du}{d\alpha}+r_1\dfrac{dv}{d\alpha}, \\ \xi\dfrac{du}{d\alpha}+\xi_1\dfrac{dv}{d\alpha}, & \eta\dfrac{du}{d\alpha}+\eta_1\dfrac{dv}{d\alpha}, \quad \zeta\dfrac{du}{d\alpha}+\zeta_1\dfrac{dv}{d\alpha}, \end{cases}$$

et les projections sur les axes mobiles de l'élément de courbe décrit par un point quelconque M dont les coordonnées sont x, y, z par rapport aux axes mobiles seront

$$(4)\quad \begin{cases} dx+\xi\,du+\xi_1\,dv+(q\,du+q_1\,dv)z-(r\,du+r_1\,dv)y, \\ dy+\eta\,du+\eta_1\,dv+(r\,du+r_1\,dv)x-(p\,du+p_1\,dv)z, \\ dz+\zeta\,du+\zeta_1\,dv+(p\,du+p_1\,dv)y-(q\,du+q_1\,dv)x. \end{cases}$$

En d'autres termes, si α était le temps, on aurait les composantes de la vitesse par rapport aux axes mobiles, en divisant les trois expressions précédentes par $d\alpha$. Nous ferons souvent usage de cette remarque, qui dispense de beaucoup de calculs et permet de laisser de côté tout ce qui concerne les axes fixes.

En terminant ici ces notions préliminaires sur le mouvement, nous nous contenterons de remarquer que la méthode suivie s'applique sans modification au cas où la position du système mobile dépendrait de trois ou même d'un plus grand nombre de paramètres.

---

dans la quatrième et la cinquième Leçon des *Vorlesungen über Mathematische Physik*, 1876.

57. Nous allons faire usage des résultats précédents pour démontrer un théorème important relatif aux déplacements à deux variables ([1]).

Si l'on considère le système mobile dans une position déterminée, il peut s'en écarter d'une infinité de manières; les rotations et les translations correspondantes au mouvement le plus général qu'il puisse prendre sont données par le Tableau (3). Cherchons si l'un des mouvements infiniment petits que l'on obtient ainsi peut se réduire à une simple rotation.

Il faudra pour cela que l'on ait (n° 3)

$$(5)\left\{\begin{array}{l}(p\,du+p_1\,dv)(\xi\,du+\xi_1\,dv)\\ \quad+(q\,du+q_1\,dv)(\eta\,du+\eta_1\,dv)+(r\,du+r_1\,dv)(\zeta\,du+\zeta_1\,dv)=0.\end{array}\right.$$

Cette équation fournit deux valeurs, en général différentes, de $\frac{du}{dv}$. Il y aura donc, en général, deux mouvements différents, réels ou imaginaires, qui se réduiront à une rotation. L'axe de rotation correspondant à chacun de ces mouvements sera défini par les équations

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{l}\xi\,du+\xi_1\,dv+(q\,du+q_1\,dv)z-(r\,du+r_1\,dv)y=0,\\ \eta\,du+\eta_1\,dv+(r\,du+r_1\,dv)x-(p\,du+p_1\,dv)z=0,\\ \zeta\,du+\zeta_1\,dv+(p\,du+p_1\,dv)y-(q\,du+q_1\,dv)x=0,\end{array}\right.$$

où l'on remplacera $\frac{du}{dv}$ par la racine de l'équation (5) correspondante au mouvement considéré.

Le résultat précédent a une conséquence importante, qu'il serait aisé de vérifier par un calcul direct. Puisque deux des mouvements se réduisent à des rotations autour de deux droites, que nous appellerons D, Δ, *la normale à la surface décrite par un point quelconque du système invariable devra rencontrer chacune de ces droites;*

([1]) Ce théorème a été énoncé en 1866, dans le *Journal de Liouville* (2e série, t. XI), par M. Mannheim, qui en a fait depuis l'objet d'une étude approfondie. On ignorait, à cette époque, qu'il avait été donné, onze ans auparavant, par M. Schönemann, dans un article présenté par Steiner à l'Académie de Berlin (*Monatsberichte,* 1855). C'est M. Geiser qui, en 1880, a appelé l'attention sur le travail de M. Schönemann et l'a fait réimprimer dans le *Journal de Crelle,* t. XC, p. 39 à 48.

car cette normale, étant perpendiculaire à tous les déplacements du point considéré, l'est en particulier à ceux que prend le point dans les rotations, et par conséquent elle rencontre nécessairement les axes de ces rotations.

58. L'équation (5) est du second degré par rapport à $\frac{du}{dv}$; elle pourra donc avoir ses racines imaginaires, et alors les deux mouvements qui se réduisent à des rotations seront certainement imaginaires; elle pourra aussi avoir ses racines égales. Nous ne discuterons pas tous les cas qui peuvent se présenter; mais nous étudierons les déplacements pour lesquels on sait *a priori* qu'il existe deux déplacements se réduisant à des rotations autour de deux droites distinctes et concourantes. En se plaçant dans cette hypothèse, M. Ribaucour a obtenu un élégant théorème ([1]) que nous allons démontrer.

Il est aisé de reconnaître que, dans le cas qui nous occupe, l'équation (5) doit être une identité. Désignons en effet par $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$ les deux valeurs de $\frac{du}{dv}$ relatives aux rotations considérées; on aura nécessairement

$$(p\,du + p_1\,dv)(\xi\,du + \xi_1\,dv) + \ldots = 0,$$
$$(p\,\delta u + p_1\,\delta v)(\xi\,\delta u + \xi_1\,\delta v) + \ldots = 0,$$

Les axes de ces rotations sont définis par les formules (6). La condition pour que ces axes se coupent s'écrit de la manière très symétrique

$$(p\,du + p_1\,dv)(\xi\,\delta u + \xi_1\,\delta v) + (p\,\delta u + p_1\,\delta v)(\xi\,du + \xi_1\,dv) + \ldots = 0.$$

Les trois équations que nous venons d'obtenir peuvent se ramener au type suivant :

$$(7)\quad \begin{cases} A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0, \\ A\,\delta u^2 + 2B\,\delta u\,\delta v + C\,\delta v^2 = 0, \\ A\,du\,\delta u + B\,(du\,\delta v + C\,dv\,\delta u) + C\,dv\,\delta v = 0, \end{cases}$$

([1]) Ribaucour, *Sur la déformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 330).

où A, B, C ont pour valeurs

$$\begin{aligned} A &= p\xi + \ldots, \\ 2B &= p_1\xi + p\xi_1 + \ldots, \\ C &= p_1\xi_1 + \ldots. \end{aligned}$$

Si l'on considère les trois équations (7) comme déterminant les inconnues A, B, C, leur déterminant sera $(du\delta v - dv\delta u)^3$, et, par hypothèse, il ne sera pas nul. On aura donc

$$A = B = C = 0,$$

et, par conséquent, l'équation (5) sera identiquement satisfaite.

On arrive aux mêmes conclusions par un raisonnement beaucoup plus simple. Si les deux droites D, Δ se coupent, leur point d'intersection aura une vitesse nulle dans tous les déplacements. On devra donc avoir, si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées de ce point relativement aux axes mobiles,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi + qz' - ry' &= 0, & \xi_1 + q_1 z' - r_1 y' &= 0, \\ \eta + rx' - pz' &= 0, & \eta_1 + r_1 x' - p_1 z' &= 0, \\ \zeta + py' - q'x' &= 0, & \zeta_1 + p_1 y' - q_1 x' &= 0, \end{aligned} \right.$$

et il n'est pas difficile de déduire de là les équations

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$

Mais voici la conséquence qui constitue le théorème de M. Ribaucour.

Supposons que, pour toutes les valeurs de u et de v, il y ait des valeurs de x', y', z' satisfaisant aux équations (8). Le point (x', y', z'), considéré comme appartenant au système mobile, décrira une surface (s) que nous regarderons comme faisant partie de ce système. Si l'on rapporte le même point aux axes fixes, il décrira une surface (S). Donnons à u et à v des accroissements du, dv; le point se déplacera sur la surface (S) et décrira un arc infiniment petit dont les projections sur les axes mobiles, données par les formules (4), seront, *en tenant compte des équations* (8),

$$dx', \quad dy', \quad dz'.$$

Or ce sont là les projections sur les mêmes axes du chemin décrit par le point considéré sur la surface (s). Ces deux chemins ayant toujours même direction et même grandeur, on voit que les deux

surfaces (s) et (S), non seulement sont tangentes, mais encore roulent l'une sur l'autre, de telle manière que les chemins parcourus par le point de contact, sur les deux surfaces, aient toujours la même longueur et la même direction.

En d'autres termes, les deux surfaces se correspondent point par point, de telle manière que deux courbes correspondantes aient la même longueur. On dit alors qu'elles sont applicables l'une sur l'autre.

59. Nous pouvons ajouter les propriétés suivantes :

Tirons des équations (8) les valeurs de $\xi, \ldots, \xi_1, \ldots$ et portons-les dans les équations (2). Après un calcul facile, nous obtiendrons les relations

$$(9)\quad \begin{cases} q\dfrac{\partial z'}{\partial v} - r\dfrac{\partial y'}{\partial v} - q_1\dfrac{\partial z'}{\partial u} + r_1\dfrac{\partial y'}{\partial u} = 0, \\ r\dfrac{\partial x'}{\partial v} - p\dfrac{\partial z'}{\partial v} - r_1\dfrac{\partial x'}{\partial u} + p_1\dfrac{\partial z'}{\partial u} = 0, \\ p\dfrac{\partial y'}{\partial v} - q\dfrac{\partial x'}{\partial v} - p_1\dfrac{\partial y'}{\partial u} + q_1\dfrac{\partial z'}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

qui conduisent à une conséquence importante. Multiplions-les respectivement par $\dfrac{\partial x'}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y'}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z'}{\partial v}$ et ajoutons-les. Nous aurons

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ \dfrac{\partial x'}{\partial u} & \dfrac{\partial y'}{\partial u} & \dfrac{\partial z'}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} & \dfrac{\partial y'}{\partial v} & \dfrac{\partial z'}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

On pourra donc poser, λ et μ_1 étant deux fonctions convenablement choisies,

$$(10)\quad \begin{cases} p_1 = -\mu_1\dfrac{\partial x'}{\partial u} + \lambda\dfrac{\partial x'}{\partial v}, \\ q_1 = -\mu_1\dfrac{\partial y'}{\partial u} + \lambda\dfrac{\partial y'}{\partial v}, \\ r_1 = -\mu_1\dfrac{\partial z'}{\partial u} + \lambda\dfrac{\partial z'}{\partial v}. \end{cases}$$

On aurait de même

$$p = \lambda_1\frac{\partial x'}{\partial u} + \mu\frac{\partial x'}{\partial v},$$

et les équations analogues en q, r. Si l'on substitue d'ailleurs

les valeurs des rotations dans les équations (9), on obtient la condition complémentaire

$$(11) \qquad \lambda_1 = -\lambda,$$

en sorte que l'on a, pour p, q, r, les valeurs suivantes

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= -\lambda \frac{\partial x'}{\partial u} + \mu \frac{\partial x'}{\partial v}, \\ q &= -\lambda \frac{\partial y'}{\partial u} + \mu \frac{\partial y'}{\partial v}, \\ r &= -\lambda \frac{\partial z'}{\partial u} + \mu \frac{\partial z'}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

qui, jointes aux équations (10), remplacent les formules (4) et (9).

60. L'interprétation géométrique des équations (10) et (12) est évidente. Les dérivées de x', y', z' par rapport à u et par rapport à v étant proportionnelles aux cosinus directeurs de deux tangentes à la surface lieu du centre instantané, les deux rotations dont les composantes sont p, q, r et p_1, q_1, r_1 sont dans le plan tangent à cette surface. Il en sera de même évidemment de la rotation qui correspond à une variation simultanée quelconque de u et de v; cela résulte des formules (3) qui donnent les composantes de cette rotation. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

S'il arrive, dans chaque position du système mobile, que deux des mouvements infiniment petits, par lesquels on amène le système dans une position infiniment voisine, se réduisent à deux rotations autour d'axes concourant en un certain point, tout autre mouvement infiniment petit du système se réduira à une rotation autour d'un axe passant par le même point, que l'on peut appeler centre instantané de rotation. Les deux surfaces lieux du centre instantané, dans le système mobile et dans l'espace, seront applicables l'une sur l'autre; elles seront toujours en contact, de telle manière que tout mouvement du système mobile se réduira au roulement de l'une des surfaces sur l'autre, l'axe instantané de la rotation passant à chaque instant par le point de contact des deux surfaces et se trouvant dans leur plan tangent commun.

Il nous reste à donner l'interprétation géométrique de l'équation (11). Elle exprime, on le reconnaîtra aisément, que la relation

entre la direction de la courbe suivie par le pôle instantané et celle de l'axe de rotation correspondant est réciproque; c'est-à-dire que, si, après avoir considéré un déplacement infiniment petit pour lequel l'axe de la rotation instantanée a une certaine direction, on envisage le déplacement dans lequel cette direction devient celle de la route suivie par le centre instantané, l'axe de rotation dans ce nouveau déplacement aura même direction que la route du centre dans le premier. On pourra ici constituer une théorie toute semblable à celle des tangentes conjuguées et de l'indicatrice de Dupin; on trouvera également deux séries de lignes, analogues aux lignes asymptotiques, qui sont caractérisées par cette propriété que, lorsque le roulement des deux surfaces l'une sur l'autre s'effectue de telle manière que le centre instantané décrive l'une de ces courbes, la rotation est à chaque instant dirigée suivant la tangente à la courbe. Par conséquent, les deux courbes correspondantes qui sont alors les routes du centre sur les deux surfaces ont, à chaque instant, même courbure et même plan osculateur. Nous laisserons au lecteur le soin de développer ces indications.

61. Réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra deux surfaces (S), (s), applicables l'une sur l'autre, si l'on place la surface (s) de telle manière que l'un de ses points coïncide avec le point homologue de (S) et que les courbes homologues des deux surfaces qui passent en ce point y soient tangentes, toutes les positions que l'on obtiendra ainsi pour la surface (s) dépendront de deux paramètres et le déplacement à deux variables défini par ces diverses positions jouira de toutes les propriétés que nous venons de signaler.

Considérons, par exemple, toutes les surfaces (s) symétriques de (S) par rapport à ses plans tangents; elles constituent évidemment toutes les positions d'une surface (s) roulant sur (S). On pourra appliquer à ce mouvement toutes les propositions précédentes. Les surfaces trajectoires des différents points du système mobile sont homothétiques aux podaires des différents points de l'espace par rapport à (S), le rapport d'homothétie étant 2.

CHAPITRE VIII.

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES COORDONNÉES CURVILIGNES.

Surface de révolution. — Alysséide. — Surface pseudosphérique. — Systèmes isothermes. — Surfaces réglées. — Surfaces développables. — Détermination de toutes les surfaces applicables sur le plan par la méthode de M. O. Bonnet.

62. Dans le premier Chapitre nous avons reconnu que l'on pouvait rattacher la théorie des courbes gauches à l'étude du mouvement d'un trièdre; de même les propositions relatives aux déplacements à deux variables trouvent une application importante dans la théorie des surfaces. Mais, avant de développer cette application, nous donnerons des notions étendues sur les systèmes de coordonnées curvilignes que Gauss a, le premier, employés d'une manière systématique, dans le mémoire fondamental *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publié en 1828 dans le t. VI des *Nouveaux Mémoires de la Société de Gœttingue*.

Il y a, comme on sait, deux moyens de définir une surface. On peut la déterminer par son équation, c'est-à-dire par la relation qui existe entre les coordonnées de l'un quelconque de ses points; mais on peut aussi supposer que ces trois coordonnées aient été exprimées au moyen de deux variables indépendantes que nous appellerons u et v. Cette seconde manière de définir la surface est même plus générale que la première; car, si l'on prend pour u et v deux des trois coordonnées rectangulaires, l'expression de la troisième sera précisément l'équation de la surface résolue par rapport à cette coordonnée.

Un système de coordonnées curvilignes peut être représenté géométriquement. Il suffit de tracer sur la surface les deux familles de courbes, lieux des points pour lesquels l'une ou l'autre des variables u, v demeure constante. Mais il importe de remarquer que le système de coordonnées n'est pas complètement défini, si l'on donne seulement les deux familles de courbes coordonnées. On

pourra évidemment, sans changer ces courbes, remplacer u et v par les variables u_1, v_1, qui seront des fonctions quelconques des premières

$$u_1 = \varphi(u), \qquad v_1 = \psi(v).$$

C'est une remarque dont on fait souvent usage et qui permet quelquefois de grandes simplifications.

63. La méthode de Gauss repose essentiellement sur l'expression de l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface.

Supposons les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface exprimées en fonction des deux variables u et v. L'expression d'un arc de courbe tracé sur la surface sera donnée par la formule

$$(1) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

où l'on a

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ \mathrm{F} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ \mathrm{G} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Nous appellerons, pour abréger, ds l'élément linéaire. Nous le mettrons aussi sous la forme

$$(3) \qquad ds^2 = \mathrm{A}^2\,du^2 + 2\mathrm{AC}\cos\alpha\,du\,dv + \mathrm{C}^2\,dv^2;$$

et l'on aura, par conséquent,

$$(4) \qquad \mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{E}}, \qquad \mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{G}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{E}}\sqrt{\mathrm{G}}}.$$

Les formules (2) montrent que $\mathrm{A}\,du$ est l'arc de la courbe $v =$ const., $\mathrm{C}\,dv$ l'arc de la courbe $u =$ const.; enfin α est l'angle sous lequel se coupent ces deux courbes au point considéré. On aura donc

$$\mathrm{F} = 0$$

toutes les fois que l'on emploiera des coordonnées curvilignes rectangulaires. Il résulte également des formules (2) que l'élément

superficiel de la surface aura pour expression

$$AC \sin\alpha \, du \, dv = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons donner quelques exemples de ce mode de représentation.

64. Considérons d'abord les surfaces de révolution, et supposons que l'on ait pris pour axe des z l'axe de la surface. Si l'on appelle r la distance d'un point du méridien à l'axe, l'équation de la surface sera

$$z = f(r).$$

Introduisons l'angle v que fait, avec le plan des xz, le méridien passant par le point considéré; nous aurons, pour les coordonnées x, y, les expressions

$$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v,$$

et de là nous déduirons, pour l'élément linéaire, la formule

$$ds^2 = dr^2(1 + f'^2) + r^2 dv^2. \tag{5}$$

Ici les courbes $r =$ const. sont les parallèles; les courbes $v =$ const. sont les méridiens. Si l'on pose

$$dr\sqrt{1 + f'^2} = du,$$

r deviendra une fonction de u, et l'équation (5) prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u)\, dv^2. \tag{6}$$

La signification de u est évidente : c'est l'arc du méridien compté à partir d'un parallèle fixe.

On peut mettre cette expression de l'élément sous une forme un peu différente. Posons

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = du_1 = \frac{dr}{r\sqrt{1 + f'^2}},$$

$\varphi(u)$ deviendra une fonction $F(u_1)$ de u_1, et l'équation (6) nous donnera

$$ds^2 = F(u_1)(du_1^2 + dv^2).$$

65. Toutes les fois que l'élément linéaire d'une surface peut

être ramené à la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

on dit que les courbes coordonnées forment un réseau *isotherme* ou *isométrique*. La première dénomination est empruntée à la théorie de la chaleur; la seconde, qui est due à M. Bonnet, s'explique par les remarques suivantes.

Imaginons que l'on trace sur la surface toutes les courbes coordonnées correspondant à des valeurs des paramètres α, β croissant suivant des progressions arithmétiques de raison infiniment petite

$$\begin{array}{llll} \alpha, & \alpha + d\alpha, & \alpha + 2d\alpha, & \ldots, \\ \beta, & \beta + d\beta, & \beta + 2d\beta, & \ldots; \end{array}$$

on aura ainsi décomposé la surface en une série de rectangles infiniment petits, dont les côtés seront égaux si l'on a pris $d\alpha = d\beta$. On dit alors que *la surface est divisée en carrés infiniment petits*. Cela n'est pas, sans doute, rigoureusement exact; mais les rectangles curvilignes formés par les lignes coordonnées considérées ont le rapport de leurs côtés adjacents d'autant plus voisin de l'unité que la raison $d\alpha$ a été choisie plus petite.

Dans le cas des surfaces de révolution, on voit que les méridiens et les parallèles constituent un système isotherme.

66. Considérons, en particulier, la surface de révolution engendrée par la révolution d'une chaînette autour de sa base. On a ici

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

et l'on trouvera sans difficulté

$$u = \sqrt{r^2 - a^2}.$$

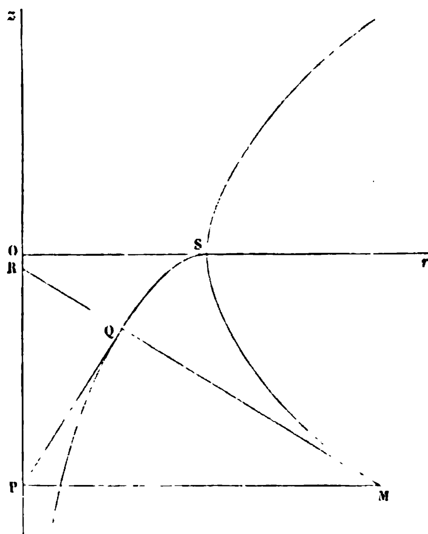
La formule (6) nous donnera, par conséquent, pour l'élément linéaire de la surface,

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2. \tag{7}$$

Cette surface très remarquable a reçu le nom d'*alysséide* ou de *caténoïde*. Comme la chaînette est la seule courbe dont le rayon

de courbure soit égal et de signe contraire à la normale, l'alysséide est la seule surface de révolution pour laquelle les rayons de courbure principaux soient en chaque point égaux et de signes contraires. On a donné le nom de *surfaces minima* à toutes celles dont les rayons de courbure sont liés par cette relation. L'alysséide est donc la seule surface minima de révolution

Fig. 1.



On sait que, si l'on considère une chaînette dont la base soit Oz et que, du pied P de l'ordonnée du point M, on abaisse une perpendiculaire PQ sur la tangente en M, l'arc de la chaînette, compté à partir du sommet S, sera égal au segment de droite MQ; par conséquent, le point Q décrira une des développantes de la chaînette.

Comme PQ est constant et égal au paramètre a de la chaînette, le lieu du point Q sera la *courbe aux tangentes égales* ou *tractrice*. En désignant par φ l'angle PMQ, l'arc décrit par le point Q, lorsque φ augmente de $d\varphi$, a pour valeur

$$d\sigma = \mathrm{MQ}\, d\varphi = a \cot\varphi\, d\varphi.$$

Comme d'ailleurs la perpendiculaire abaissée de Q sur Oz a

pour expression

$$r = a \sin\varphi,$$

on voit que l'élément linéaire de la surface engendrée par la révolution de la courbe aux tangentes égales autour de Oz sera donné par la formule

$$ds^2 = d\sigma^2 + r^2 dv^2 = a^2(\cot^2\varphi\, d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, dv^2).$$

Posons

$$\cot\varphi\, d\varphi = du,$$

ce qui donne

$$\sin\varphi = e^u,$$

et nous aurons

$$(8) \qquad ds^2 = a^2(du^2 + e^{2u}\, dv^2).$$

Remarquons d'ailleurs que, dans le triangle rectangle RPM, on a

$$MQ.QR = a^2.$$

Les centres de courbure principaux de la surface sont évidemment les points M et R; donc les rayons de courbure principaux satisfont à la relation

$$RR' = -a^2.$$

Mais cette propriété ne caractérise nullement la surface, il est aisé de le démontrer.

Proposons-nous, en effet, de déterminer toutes les surfaces de révolution dont les rayons de courbure sont liés par la relation précédente. Par un calcul sur lequel nous ne reviendrons pas ici, on trouve que les variables z et r doivent satisfaire à la relation différentielle

$$(9) \qquad dz = \pm\sqrt{\frac{b^2 - r^2}{r^2 + a^2 - b^2}}\, dr,$$

b désignant une constante arbitraire qui peut prendre toutes les valeurs possibles. L'élément linéaire de la surface est donné par la formule

$$ds^2 = \frac{a^2\, dr^2}{r^2 + a^2 - b^2} + r^2\, dv^2.$$

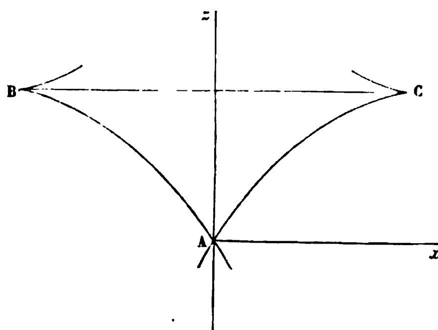
Supposons d'abord que b soit égal à a. On retrouve alors la

surface dont le méridien est la courbe aux tangentes égales. Nous lui donnerons le nom de surface *pseudosphérique*.

Si b est plus petit que a, le rayon r peut prendre toutes les valeurs inférieures à b et l'on obtient une surface qui, comme la précédente, a encore un parallèle de rebroussement BC; mais tous les méridiens vont *couper* l'axe de la surface en un même point A, sous un angle fini dont la tangente a pour valeur

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}.$$

Fig. 2.



Si l'on pose alors

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}\,\frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad v = \frac{av'}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

on obtient, pour l'élément linéaire, l'expression

$$(10) \qquad ds^2 = a^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 dv'^2\right].$$

Si b est au contraire plus grand que a, r a un minimum $\sqrt{b^2 - a^2}$ et les méridiens ne rencontrent plus l'axe. La surface admet alors deux parallèles de rebroussement et un cercle de gorge DE (*fig.* 3). Si l'on pose

$$r = \sqrt{b^2 - a^2}\,\frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad v = \frac{av'}{\sqrt{b^2 - a^2}},$$

l'élément linéaire devient

$$(11) \qquad ds^2 = a^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 dv'^2\right].$$

67. Après les surfaces de révolution, nous examinerons le groupe si important formé par les surfaces réglées. Elles peuvent être définies par les trois équations

$$(12)\qquad \begin{cases} x = a_1 u + b_1, \\ y = a_2 u + b_2, \\ z = a_3 u + b_3, \end{cases}$$

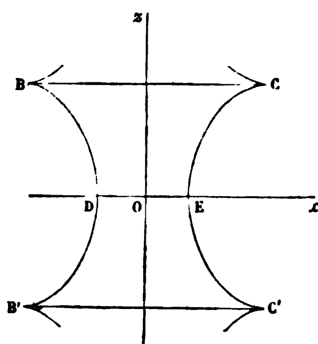
où a, b, ... doivent être considérées comme des fonctions d'un paramètre v. Si l'on suppose

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,$$

u désignera la longueur portée sur chaque génératrice rectiligne de la surface à partir de la courbe définie par les équations

$$(13)\qquad x = b_1, \qquad y = b_2, \qquad z = b_3.$$

Fig. 3.



On déduira des formules (12) l'expression suivante de l'élément linéaire

$$(14)\qquad ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dv + (A u^2 + 2B u + C)\,dv^2,$$

où A, B, C, D sont les fonctions de v définies par les relations

$$A = a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2, \qquad C = b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2,$$
$$B = a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3', \qquad D = a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3'.$$

Si l'on suppose que la courbe $u = 0$, définie par les équations (13), ait été choisie parmi les trajectoires orthogonales des géné-

ratrices, on aura

$$D = 0,$$

et l'élément linéaire prendra la forme plus simple

(15) $$ds^2 = du^2 + (Au^2 + 2Bu + C)\,dv^2.$$

Dans ce cas le système de coordonnées sera formé des génératrices rectilignes $v = \text{const.}$ et de leurs trajectoires orthogonales.

Pour ramener l'élément linéaire général, donné par la formule (14), à la forme (15), il suffira de substituer à u la variable suivante :

$$u' = u + \int D\,dv.$$

On reconnaît ainsi que, dans toutes les surfaces réglées, les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes sont déterminées par une simple quadrature.

68. Considérons, par exemple, la surface formée par les normales principales de l'hélice ou *hélicoïde gauche à plan directeur*. Elle est définie par les trois équations

(16) $$\begin{cases} z = av, \\ x = u\cos v, \\ y = u\sin v; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

(17) $$ds^2 = (a^2 + u^2)\,dv^2 + du^2.$$

La comparaison des formules (7) et (17) nous montre que, si l'on fait correspondre sur l'hélicoïde et sur l'alysséide les points pour lesquels les valeurs de u et de v sont les mêmes, les arcs de deux courbes correspondantes seront rigoureusement égaux. On dit dans ce cas que *les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre*. Il est clair, en effet, que si l'on considère une surface comme un tissu flexible et inextensible, et si l'on admet la possibilité de déformer cette surface sans déchirure ni duplicature, la longueur de toute courbe tracée sur la surface sera demeurée invariable dans la déformation. Sans examiner la question de savoir s'il est possible d'amener la première surface à coïncider avec la seconde par une suite continue de déformations, on dit que deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre quand elles satisfont à la définition géométrique que nous venons de donner. Le

problème de la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée est un des plus intéressants, mais aussi un des plus difficiles, que l'on rencontre dans l'application de l'analyse à la Géométrie. Dans le cas qui nous occupe, l'hélicoïde est applicable sur l'alysséide, les génératrices rectilignes de la première surface correspondent aux méridiens de la seconde et les hélices aux parallèles.

69. Revenons aux surfaces réglées. Il est aisé, lorsqu'on a seulement l'expression (15) de l'élément linéaire, de distinguer les surfaces gauches des surfaces développables.

En effet, on a identiquement

$$\mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}u + \mathrm{C} = (a'_1 u + b'_1)^2 + (a'_2 u + b'_2)^2 + (a'_3 u + b'_3)^2.$$

On voit donc que le trinôme premier membre sera une somme de carrés, et l'on aura

$$\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} < 0,$$

tant que les équations

$$\frac{a'_1}{b'_1} = \frac{a'_2}{b'_2} = \frac{a'_3}{b'_3}, \tag{18}$$

ne seront pas satisfaites. Or ces dernières équations n'ont lieu que dans le cas où la surface est développable.

En effet, les équations (12) nous donnent

$$\begin{aligned} dx &= a_1 du + (a'_1 u + b'_1)\,dv, \\ dy &= a_2 du + (a'_2 u + b'_2)\,dv, \\ dz &= a_3 du + (a'_3 u + b'_3)\,dv. \end{aligned}$$

Exprimons qu'il existe un point de la génératrice qui décrit une courbe tangente à cette génératrice; il faudra qu'en prenant pour u une fonction convenable de v on ait

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3},$$

ce qui donne, en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs,

$$\frac{a'_1 u + b'_1}{a_1} = \frac{a'_2 u + b'_2}{a_2} = \frac{a'_3 u + b'_3}{a_3}.$$

Si l'on tient compte de l'équation $\mathrm{D} = 0$, on trouvera que la

valeur commune des trois rapports précédents doit être égale à zéro.

On devra donc avoir

$$-u = \frac{b'_1}{a'_1} = \frac{b'_2}{a'_2} = \frac{b'_3}{a'_3},$$

et, par conséquent, les équations (18) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface soit développable.

Enfin, en substituant à v une fonction convenable de v, on pourra réduire le coefficient A à l'unité. Nous avons donc, comme forme réduite de l'élément,

$$ds^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]\,dv^2 \tag{19}$$

dans le cas des surfaces gauches, et

$$ds^2 = du^2 + (u-\alpha)^2\,dv^2 \tag{20}$$

dans celui des surfaces développables, α et β désignant des fonctions de v (¹).

70. De la forme de l'élément linéaire des surfaces développables on déduit facilement qu'elles sont applicables sur le plan.

Reprenons, en effet, la formule (20) et décomposons le second membre en deux facteurs

$$du + i(u-\alpha)\,dv,$$
$$du - i(u-\alpha)\,dv.$$

Si l'on multiplie ces facteurs respectivement par e^{iv}, e^{-iv}, ils deviennent des différentielles exactes et l'on peut poser

$$\left\{\begin{aligned} e^{iv}[du + i(u-\alpha)\,dv] &= dx + i\,dy,\\ e^{-iv}[du - i(u-\alpha)\,dv] &= dx - i\,dy.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

On a, en intégrant,

$$\left\{\begin{aligned} x + iy &= ue^{iv} - i\int \alpha e^{iv}\,dv,\\ x - iy &= ue^{-iv} + i\int \alpha e^{-iv}\,dv.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

(¹) Cette théorie laisse toutefois de côté les surfaces réglées imaginaires pour lesquelles on a

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0,$$

et qui sont engendrées par des droites rencontrant le cercle imaginaire de l'infini.

D'ailleurs, en multipliant membre à membre les formules (21), on obtient, pour l'élément linéaire de la surface développable, l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

qui démontre la propriété annoncée.

Les formules (22) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(23)\qquad \begin{cases} x = u\cos v + \int \alpha \sin v\, dv, \\ y = u \sin v - \int \alpha \cos v\, dv. \end{cases}$$

On voit qu'aux génératrices rectilignes de la surface, définies par la relation $v = \text{const.}$, correspondent des droites du plan; par conséquent, les trajectoires orthogonales des génératrices ont pour transformées les courbes parallèles, trajectoires orthogonales des droites du plan. A l'arête de rebroussement, $u = \alpha$, de la développable correspond l'enveloppe de toutes les droites du plan. Tous ces résultats, que nous ne nous arrêtons pas à vérifier, sont bien d'accord avec les opérations mécaniques par lesquelles on réalise le développement de cette classe si importante de surfaces.

71. Nous venons d'indiquer un moyen d'appliquer la surface développable sur un plan. Il est naturel de se demander s'il n'y en a pas d'autre, et si, par exemple, on ne pourrait pas réaliser cette application de la surface en faisant correspondre aux génératrices rectilignes de la surface des lignes courbes du plan. Le raisonnement suivant donne la réponse à cette question.

Supposons que l'on ait, de deux manières différentes, appliqué la développable sur le plan, c'est-à-dire qu'on ait mis son élément linéaire sous les deux formes

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad ds'^2 = dx'^2 + dy'^2;$$

on en déduira

$$(24)\qquad dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2.$$

Il est aisé de résoudre cette équation de la manière la plus générale; on peut, en effet, la remplacer par l'un ou l'autre des systèmes

$$(25)\qquad \begin{cases} dx' = \cos\alpha\, dx - \sin\alpha\, dy, \\ dy' = \sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy, \end{cases} \qquad \begin{cases} dx' = \cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy, \\ dy' = \sin\alpha\, dx - \cos\alpha\, dy, \end{cases}$$

où α est une inconnue auxiliaire, et qui se déduisent l'un de l'autre par le changement de y en $-y$. Considérons, par exemple, le premier. En écrivant que les seconds membres des équations sont des différentielles exactes, nous obtenons les relations

$$\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad \cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

qui donnent

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0;$$

α est donc constante. En intégrant les formules (25) et désignant par x_0, y_0 deux nouvelles constantes, on aura

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0.$$

Ce sont les formules de la transformation des coordonnées. Par suite, x, y et x', y' peuvent être considérées comme les coordonnées d'un même point du plan, rapporté à des axes différents; et les deux représentations de la surface développable ne doivent pas être regardées comme réellement distinctes.

72. Une autre question très intéressante se présente ici. Nous venons de voir que l'enveloppe d'un plan mobile est applicable sur le plan. La réciproque est-elle vraie, et toute surface applicable sur le plan est-elle l'enveloppe d'un plan mobile? Cette proposition a toujours été admise par Monge et les autres géomètres de son époque, comme le prouve le nom même de *surface développable* donné dès le début à l'enveloppe d'un plan mobile (¹). Elle est un corollaire immédiat des propositions générales que nous aurons à développer dans la suite; mais nous pouvons, dès à présent, en donner une démonstration directe et très simple, due à M. O. Bonnet (²).

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface cherchée, applicable sur un plan, et soient α, β celles du point correspondant

---

(¹) *Voir*, en particulier, le Chapitre sur les surfaces développables dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de MONGE.

(²) *Annali di Matematica*, 2ᵉ série, t. VII, p. 61.

sur le plan. On doit avoir

(26) $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

ce qui donne les trois équations

(27) $$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2 = 1,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2 = 1,\\ &\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0. \end{aligned}\right.$$

Différentions les deux premières de ces équations ; nous aurons

(28) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} = 0,\\ &\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2} + \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2} + \frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2} = 0,\\ &\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,\\ &\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0. \end{aligned}\right.$$

Différentions maintenant la dernière des équations (27) ; en tenant compte des précédentes, nous trouverons

(29) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial\beta^2} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 y}{\partial\beta^2} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2} = 0,\\ &\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

En comparant les équations (28) et (29), nous voyons que l'on doit avoir

(A) $$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}},$$

(B) $$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 x}{\partial\beta^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial\beta^2}}.$$

Le système (A) nous apprend que $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial\alpha}$ sont fonctions d'une

même variable et le système (B) établit qu'il en est de même pour $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, $\frac{\partial y}{\partial \beta}$, $\frac{\partial z}{\partial \beta}$. Mais, par suite de la dernière équation (27) ou de l'une des équations (29), les deux variables dont dépendent ces deux groupes de dérivées sont fonctions l'une de l'autre et, par conséquent, les six dérivées de x, y, z sont fonctions d'une même variable, que nous désignerons par t.

Cela posé, si l'on désigne par p et q les dérivées de z considérée comme fonction de x et de y, p et q seront déterminées par les équations

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta},$$

qui montrent que p et q sont fonctions de t; donc p est fonction de q, ce qui caractérise, on le sait, les surfaces enveloppes d'un plan mobile.

Le nom de *développables* donné à ces surfaces est ainsi pleinement justifié.

CHAPITRE IX.

SURFACES DÉFINIES PAR DES PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES.

Hélicoïdes généraux. — Théorème de Bour. — Surfaces de révolution applicables les unes sur les autres. — Surfaces engendrées par le mouvement d'une courbe invariable. — Surfaces moulures. — Surfaces spirales de M. Maurice Lévy.

---

73. Les surfaces de révolution jouissent d'une propriété cinématique importante. Elles ne cessent pas de glisser sur elles-mêmes lorsqu'on leur imprime un mouvement de rotation autour de l'axe. Cette propriété qu'elles possèdent, de pouvoir être déplacées sans cesser de coïncider avec elles-mêmes, appartient aussi aux cylindres et à une classe plus étendue de surfaces, les hélicoïdes, qui comprennent comme cas limites, et les cylindres, et les surfaces de révolution.

Considérons, en effet, un système solide animé d'un mouvement hélicoïdal. Nous savons que tous les points de ce système décrivent des hélices de même axe et de même pas; chacune de ces hélices est animée d'un mouvement dans lequel elle ne cesse de glisser sur sa position primitive. Si donc on associe toutes les hélices rencontrant une courbe donnée (C), elles formeront une surface qui pourrait être engendrée par le mouvement hélicoïdal de la courbe (C), et qui possédera évidemment la propriété de glisser sur elle-même dans le mouvement. Cette surface est un *hélicoïde général*. Nous allons donner les équations qui la déterminent et chercher son élément linéaire.

Les hélices décrites dans le mouvement hélicoïdal permanent sont définies par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos v_1, \\ y = \rho\sin v_1, \\ z = z_0 + hv_1, \end{cases}$$

où h désigne le pas commun des hélices divisé par 2π. Si l'on

prend pour z_0 une fonction quelconque de ρ, les coordonnées x, y, z deviendront des fonctions des deux variables ρ et v_1 ; les formules précédentes définiront la surface hélicoïde la plus générale. Faisons

$$z_0 = \varphi(\rho),$$

et calculons l'élément linéaire de l'hélicoïde. Nous trouverons

$$ds^2 = (1 + \varphi'^2)\,d\rho^2 + 2h\varphi'\,d\rho\,dv_1 + (\rho^2 + h^2)\,dv_1^2.$$

En transformant le second membre, on obtient

$$(2) \qquad ds^2 = \left(1 + \frac{\rho^2\varphi'^2}{\rho^2 + h^2}\right)d\rho^2 + (\rho^2 + h^2)\left(dv_1 + \frac{h\varphi'\,d\rho}{\rho^2 + h^2}\right)^2.$$

Si l'on introduit les deux nouvelles variables u, v définies par les quadratures suivantes

$$(3) \qquad \begin{cases} du = d\rho\sqrt{1 + \dfrac{\rho^2\varphi'^2}{\rho^2 + h^2}}, \\ dv = dv_1 + \dfrac{h\varphi'\,d\rho}{\rho^2 + h^2}, \end{cases}$$

$\rho^2 + h^2$ deviendra une fonction de u que nous désignerons par U^2, et l'élément linéaire sera ramené à la forme

$$(4) \qquad ds^2 = du^2 + U^2\,dv^2.$$

Les courbes $u =$ const. sont les hélices tracées sur la surface, et, par suite, les courbes $v =$ const. sont les trajectoires orthogonales de ces hélices. On reconnaît ainsi que ces trajectoires se déterminent par une simple quadrature.

74. La forme (4) de l'élément linéaire est identique à celle que nous avons déjà obtenue pour les surfaces de révolution (n° 64). On sait, d'ailleurs, que ces dernières surfaces peuvent être considérées comme des formes limites des hélicoïdes généraux, correspondantes au cas où le pas commun des hélices devient nul. On peut donc prévoir que les hélicoïdes sont applicables sur des surfaces de révolution. Ce beau théorème est dû à Bour, qui l'a établi dans son *Mémoire sur la déformation des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier, p. 82). Pour le démontrer, nous ferons voir que la forme (4) de l'élément linéaire, donnée *a priori*, convient à une infinité d'hélicoïdes, parmi lesquels se trouvent toujours des surfaces de révolution.

Les formules (1), où l'on considère z_0 comme une fonction de ρ, définissent l'hélicoïde le plus général, et la formule (2) fait connaître l'élément linéaire de cette surface. Pour le rendre identique à l'élément linéaire donné par l'équation (4), *il suffira* évidemment de poser

$$\left(1+\frac{\rho^2\varphi'^2}{\rho^2+h^2}\right)d\rho^2 = du^2,$$

$$(\rho^2+h^2)\left(dv_1+\frac{h\varphi'\,d\rho}{\rho^2+h^2}\right)^2 = \mathrm{U}^2\,dv^2$$

ou, en extrayant les racines carrées,

$$(5)\qquad \begin{cases} du = \pm\sqrt{d\rho^2+\dfrac{\rho^2\,d\varphi^2}{\rho^2+h^2}}, \\ dv_1+\dfrac{h\,d\varphi}{\rho^2+h^2} = \dfrac{\pm\mathrm{U}}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\,dv. \end{cases}$$

La première de ces formules montre que ρ est une fonction de u. Pour que la seconde puisse avoir lieu, il faut évidemment que le rapport $\dfrac{\pm\mathrm{U}}{\sqrt{\rho^2+h^2}}$ soit égal à une constante que nous désignerons par $\dfrac{1}{m}\cdot$ On aura donc

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{\rho^2+h^2} = \pm m\mathrm{U}, \\ dv_1+\dfrac{h\,d\varphi}{\rho^2+h^2} = \dfrac{dv}{m}. \end{cases}$$

Les formules (5) et (6) nous conduisent, par des éliminations faciles, aux valeurs suivantes de ρ, $d\varphi$, dv_1 :

$$(7)\qquad \begin{cases} d\varphi = \dfrac{m^2\mathrm{U}\,du}{m^2\mathrm{U}^2-h^2}\sqrt{\mathrm{U}^2(1-m^2\mathrm{U}'^2)-\dfrac{h^2}{m^2}}, \\ dv_1 = \dfrac{dv}{m}-\dfrac{h\,d\varphi}{m^2\mathrm{U}^2} = \dfrac{dv}{m}-\dfrac{h\,du}{\mathrm{U}(m^2\mathrm{U}^2-h^2)}\sqrt{\mathrm{U}^2(1-m^2\mathrm{U}'^2)-\dfrac{h^2}{m^2}}, \\ \rho = \sqrt{m^2\mathrm{U}^2-h^2}. \end{cases}$$

Toutes les quantités qui figurent dans les formules (1) sont ainsi exprimées en fonction de u et de v; la question proposée est donc complètement résolue.

75. Les hélicoïdes que nous venons de déterminer dépendent de deux paramètres arbitraires h et m. Il est aisé de s'assurer qu'ils

ne sont pas superposables. Considérons, en particulier, le cas où l'on a

$$U^2 = u^2 + a^2,$$

et supposons $m = 1$. Les formules précédentes deviendront

$$\rho = \sqrt{u^2 + a^2 - h^2},$$
$$d\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{u^2 + a^2 - h^2}\sqrt{u^2 + a^2}\,du,$$
$$dv_1 = dv - \frac{h\,d\varphi}{u^2 + a^2}.$$

Si l'on donne à h toutes les valeurs comprises entre o et a, on aura une série continue d'hélicoïdes, tous applicables les uns sur les autres. Ils présenteront toutes les formes intermédiaires entre l'alysséide et l'hélicoïde gauche à plan directeur, qui sont les termes extrêmes de cette série et qui correspondent respectivement aux valeurs o et a de l'arbitraire h.

76. Revenons aux formules générales (7). Si l'on y fait $h = 0$, on obtient des surfaces de révolution, toutes applicables les unes sur les autres, aussi bien que sur les hélicoïdes généraux définis par ces équations. Elles sont déterminées par le système très simple

$$(8)\qquad \begin{cases} x = a\,U\cos\dfrac{v}{a}, \\ y = a\,U\sin\dfrac{v}{a}, \\ z = \displaystyle\int\sqrt{1 - a^2U'^2}\,du, \end{cases}$$

où a est mis à la place de m.

Quand on fait varier le paramètre a on obtient une suite continue de surfaces; nous signalerons, sans les démontrer, les propriétés suivantes que nous rattacherons plus tard à des théorèmes généraux.

Si l'on considère sur toutes ces surfaces les points qui correspondent à une même valeur de u : 1° le produit des rayons de courbure principaux en ces points sera le même pour toutes les surfaces; 2° la tangente au méridien, prolongée jusqu'à sa rencontre avec l'axe, aura aussi la même longueur pour tous les points considérés. Nous indiquerons plus loin une application de cette dernière propriété, et nous allons étudier deux exemples particuliers.

77. Faisons d'abord

$$U = \sin u,$$

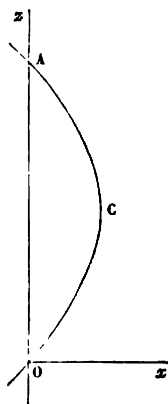
ce qui donnera les surfaces de révolution applicables sur la sphère.

Les formules (8) deviendront ici

$$(9)\qquad \begin{cases} x = a \sin u \cos \dfrac{v}{a}, \\ y = a \sin u \sin \dfrac{v}{a}, \\ z = \int \sqrt{1 - a^2 \cos^2 u}\, du. \end{cases}$$

Supposons d'abord $a^2 < 1$; u pourra prendre toutes les valeurs possibles sans que l'expression de z cesse d'être réelle. La portion OCA du méridien qui correspond à toutes les valeurs de u comprises entre o et π aura la forme indiquée (*fig.* 4).

Fig. 4.



Les angles que fait en O et en A le méridien avec l'axe sont finis et ne deviennent droits que lorsque a est égal à 1. Alors le méridien devient un demi-cercle et il engendre la sphère.

Les variables u et v, qui déterminent un point à la surface de la sphère, ont une signification très simple; elles sont la *colatitude* et la *longitude* de ce point. D'après cette remarque, nous pouvons déterminer aisément les limites et la forme de la portion de sphère qui est exactement applicable sur toute la surface engendrée par la révolution complète de la branche OCA du méridien.

En effet, les formules (9) relatives à une valeur quelconque de a nous montrent que l'angle v_1 fait par le méridien qui passe au point (u, v) de la surface avec un méridien fixe a pour valeur

$$v_1 = \frac{v}{a}. \tag{10}$$

Par conséquent, lorsque v_1 aura varié de o à 2π, v aura crû de $2a\pi$. Ainsi la surface engendrée par la révolution complète de l'arc ACO est applicable sur le fuseau de la sphère compris entre deux plans méridiens faisant l'angle $2a\pi$. On voit que, pour des valeurs très petites de a, ce fuseau deviendra infiniment étroit.

Si a^2 est supérieur à l'unité, le méridien change complètement de forme, car u ne peut prendre que les valeurs satisfaisant à l'inégalité

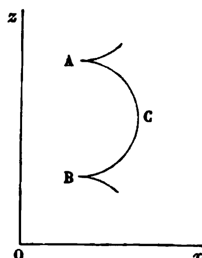
$$\cos^2 u < \frac{1}{a^2}.$$

Soit λ_0 l'angle aigu défini par la formule

$$\cos\lambda_0 = \frac{1}{a}.$$

Il faudra faire varier u entre λ_0 et $\pi - \lambda_0$. Le méridien aura la forme représentée (*fig.* 5). La surface engendrée par ce méridien

Fig. 5.



sera applicable sur la zone de la sphère comprise entre les deux cercles de colatitude λ_0 et $\pi - \lambda_0$. Mais, de plus, la formule (10) nous montre qu'il suffira de faire tourner le méridien ACB d'un angle égal à $\frac{2\pi}{a}$ pour obtenir toute la portion de la surface, applicable point par point sur la zone sphérique que nous venons de définir.

Si a grandit, cette zone diminue indéfiniment et se réduit à une bande infiniment étroite longeant l'équateur de la sphère.

La discussion détaillée que nous venons de faire avait pour but de mettre en évidence un fait intéressant. Considérons un morceau, de forme d'ailleurs quelconque, de la surface de la sphère. Quand la sphère se déforme de manière à coïncider successivement avec les diverses surfaces définies par les formules (9), cette portion de la surface sphérique que nous avons choisie se déplacera et se déformera d'une manière continue en demeurant applicable sur sa position initiale. Mais ce mouvement ne pourra être continué indéfiniment sans qu'il se produise une déchirure; car nous avons vu que, si le paramètre a augmente à partir de 1 et croît indéfiniment, la seule portion de la sphère qui puisse être appliquée sur les surfaces qui correspondent à ces valeurs croissantes de a se réduit à une zone, d'aire aussi petite qu'on le veut, entourant l'équateur. Par conséquent, si l'on considère une portion finie de la sphère, le mouvement de déformation de cette portion cessera d'être possible dès que a aura atteint une limite supérieure, qui dépend évidemment de la forme de cette portion.

78. Du moins, dans l'exemple que nous venons d'étudier, toutes les surfaces définies par les formules (9), et pour lesquelles a^2 est inférieur ou égal à l'unité, jouissent de la propriété de représenter complètement l'élément linéaire, c'est-à-dire elles ont des points réels, correspondants à toutes les valeurs réelles de u et de v. Il n'en est plus de même dans l'exemple suivant.

Supposons que, dans les formules générales, on fasse

$$U = e^u.$$

L'élément linéaire aura pour expression

$$(11) \qquad ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2,$$

et les équations (8) nous donneront ici

$$(12) \qquad x = ae^u \cos\frac{v}{a}, \qquad y = ae^u \sin\frac{v}{a}, \qquad z = \int \sqrt{1 - a^2 e^{2u}}\, du.$$

Ces formules définissent des surfaces qui sont toutes égales; car, si l'on pose

$$(13) \qquad ae^u = \sin\varphi, \qquad v = av_1,$$

elles deviennent

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \sin\varphi\cos v_1, \\ y &= \sin\varphi\sin v_1, \\ z &= \cos\varphi + \log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \end{aligned}\right.$$

et ne contiennent plus a. Nous avons donc une seule surface, qui est applicable d'une infinité de manières sur elle-même, et les formules qui réalisent cette application sont

$$ae^u = e^{u'}, \qquad v = av',$$

u', v' désignant les coordonnées du point qui correspond au point (u, v). Ce résultat est d'ailleurs évident, d'après la forme même de l'élément linéaire (11). Il suit de là, et des propriétés que nous avons signalées plus haut (n° 76) : 1° que le méridien ne peut être que la *courbe aux tangentes égales* ou *tractrice ;* 2° que le produit des rayons de courbure principaux est le même en tous les points de la surface. On reconnaît les propriétés de la surface pseudosphérique que nous avons déjà étudiée directement ; et, en comparant l'expression de l'élément linéaire à celle qui a été donnée (n° 65), on voit que le produit des rayons de courbure de la surface est égal à -1.

Il y a ici un fait important à signaler. Pour que les valeurs de x, y, z données par les formules (12) soient réelles, il faut que l'angle φ soit réel, c'est-à-dire que l'on ait

$$a^2 e^{2u} < 1.$$

Quelle que soit la valeur donnée du paramètre a, il y aura donc toujours des valeurs suffisamment grandes de u, associées à des valeurs quelconques de v, *auxquelles ne correspondra aucun point de la surface*. Par conséquent, s'il est vrai que la pseudosphère soit applicable sur elle-même d'une infinité de manières, aucune des solutions que l'on choisira ne pourra donner une représentation géométrique complète de l'élément linéaire.

79. Les surfaces que nous venons d'étudier se rapprochent par une propriété commune. Elles peuvent être considérées toutes comme engendrées par une courbe invariable de forme qui se meut d'après une loi donnée. Proposons-nous maintenant d'étudier les surfaces les plus générales satisfaisant à cette définition.

Considérons une courbe (C) et un système d'axes mobiles invariablement lié à la courbe. Supposons que la position de la courbe et des axes mobiles dépende d'un paramètre v qui jouera le rôle du temps, et soient ξ, η, ζ; p, q, r les translations et les rotations du système mobile. Ces six quantités seront fonctions de v. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe par rapport aux axes mobiles; x, y, z seront des fonctions données d'un paramètre u.

Si les axes mobiles se déplacent, et que le point M se déplace en même temps d'une manière quelconque sur la courbe, les projections de l'arc infiniment petit décrit par le point seront

$$(15)\qquad \begin{cases} dx + (\xi + qz - ry)\,dv, \\ dy + (\eta + rx - pz)\,dv, \\ dz + (\zeta + py - qx)\,dv. \end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{dx}{du} = x', \qquad \frac{dy}{du} = y', \qquad \frac{dz}{du} = z';$$

le carré de l'élément linéaire de la surface engendrée par la courbe aura pour expression la somme des carrés des trois projections, c'est-à-dire

$$(16)\qquad \begin{cases} ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,du^2 \\ \qquad + 2\left(x'\xi + y'\eta + z'\zeta + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ p & q & r \end{vmatrix}\right) du\,dv \\ \qquad + [(\xi + qz - ry)^2 + (\eta + rx - pz)^2 + (\zeta + py - qx)^2]\,dv^2. \end{cases}$$

80. Il suffirait d'introduire dans cette formule des hypothèses spéciales, convenablement choisies, pour retrouver tous les résultats précédents.

Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir l'élément linéaire des surfaces réglées. On prendra pour axe des z du trièdre mobile la génératrice rectiligne de la surface, et l'on fera décrire à l'origine du trièdre une trajectoire orthogonale des génératrices. Cela donne les conditions

$$x = y = 0, \qquad z = u, \qquad \zeta = 0,$$

et, par suite, la formule (16) se réduira à la suivante :

$$(17) \qquad ds^2 = du^2 + [(\xi + qu)^2 + (\eta - pu)^2]dv^2.$$

Si l'on veut exprimer que la surface est développable, il faudra considérer les projections (15) de l'arc décrit par un point quelconque de la surface. Elles deviennent ici

$$(\xi + qu)\,dv, \quad (\eta - pu)\,dv, \quad du.$$

Le plan tangent au point $z = u$ aura donc pour équation, par rapport aux axes mobiles,

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi + qu}{\eta - pu},$$

Pour qu'il soit le même en tous les points d'une génératrice, il faudra que l'on ait

$$\frac{\xi}{\eta} = -\frac{q}{p},$$

c'est-à-dire que le coefficient de dv^2 dans la formule (17) soit un carré parfait. C'est le résultat déjà établi (n° 69).

81. Considérons maintenant le cas nouveau où le mouvement de la courbe mobile (C) se réduit à une translation. Il faut alors, dans la formule (16), faire

$$p = q = r = 0,$$

et l'on a, par conséquent,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = {} & (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,du^2 \\ & + 2(x'\xi + y'\eta + z'\zeta)\,du\,dv + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\,dv^2. \end{aligned} \right.$$

On parvient à un résultat identique par la méthode directe suivante. Soient

$$x = \mathrm{U}, \qquad y = \mathrm{U}_1, \qquad z = \mathrm{U}_2$$

les équations qui déterminent la courbe par rapport aux axes mobiles, U, U_1, U_2 désignant des fonctions d'un même paramètre u. Supposons que les axes fixes aient été choisis parallèles aux axes mobiles, et désignons par V, V_1, V_2 les coordonnées de l'origine des axes mobiles par rapport aux axes fixes ; V, V_1, V_2 seront des fonctions d'un paramètre v. Les coordonnées d'un

point quelconque de la surface cherchée, par rapport aux axes fixes, auront évidemment les expressions suivantes :

$$(19)\qquad \begin{cases} X = U + V, \\ Y = U_1 + V_1, \\ Z = U_2 + V_2. \end{cases}$$

La symétrie de ces formules nous montre immédiatement que la surface peut être engendrée de deux manières différentes par la translation d'une courbe invariable, et que les courbes coordonnées de chacun des deux systèmes (u) et (v) se déduisent de l'une d'elles par un simple mouvement de translation.

82. On peut encore interpréter les formules (19) de la manière suivante. Considérons les deux courbes définies par les équations

$$x = 2U, \quad y = 2U_1, \quad z = 2U_2,$$

et

$$x = 2V, \quad y = 2V_1, \quad z = 2V_2.$$

Le lieu des milieux de toutes les cordes qui joignent un point de la première à un point de la seconde est la surface considérée. Cette définition, due à M. Lie, met bien en évidence le double mode de génération de la surface. Il suffit d'associer toutes les cordes passant, soit par un point de la première courbe, soit par un point de la seconde, pour retrouver les deux systèmes de génératrices invariables.

Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions U, V soient réelles et que l'on ait pris, pour les paramètres u et v, les arcs des deux courbes

$$x = U, \quad y = U_1, \quad z = U_2,$$
$$x = V, \quad y = V_1, \quad z = V_2;$$

l'élément linéaire de la surface prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2(U'V' + U'_1 V'_1 + U'_2 V'_2)\, du\, dv$$

Si donc on pose

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad \alpha = u + v,$$
$$v = \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad \beta = u - v,$$

l'expression de l'élément linéaire deviendra

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{1 + U'V' + U'_1 V'_1 + U'_2 V'_2}{2}\, d\alpha^2 \\ & + \frac{1 - U'V' - U'_1 V'_1 - U'_2 V'_2}{2}\, d\beta^2. \end{aligned}\right.$$

Cette formule met en évidence un système de coordonnées rectangulaires sur la surface, car l'élément linéaire est ramené à la forme

$$(21)\qquad ds^2 = A^2\, d\alpha^2 + C^2\, d\beta^2,$$

et même avec la condition

$$A^2 + C^2 = 1.$$

83. Nous avons à signaler encore une propriété géométrique tout à fait générale des surfaces que nous considérons. Mais, pour la démontrer, nous devons commencer par rappeler un théorème relatif aux tangentes conjuguées.

Nous dirons que deux familles de lignes tracées sur une surface sont *conjuguées* lorsque les tangentes aux lignes des deux familles passant en un point quelconque de la surface sont conjuguées (d'après la définition de Dupin). Voici comment on peut exprimer cette relation :

Soient u et v les paramètres des deux familles de courbes, et supposons que l'on connaisse les expressions des coordonnées rectilignes x, y, z d'un point quelconque de la surface en fonction de u et de v. Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées courantes, l'équation du plan tangent à la surface au point $M(x, y, z)$ sera

$$(22)\qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

p et q désignant, suivant l'usage, les dérivées de z par rapport à x et à y. Supposons que l'on se déplace sur la ligne $v =$ const. L'intersection du plan tangent avec sa position infiniment voisine sera définie, d'après la théorie des enveloppes, par l'équation (22) jointe à celle que l'on obtient en la différentiant par rapport à u, c'est-à-dire,

$$-\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial u}(X - x) + \frac{\partial q}{\partial u}(Y - y) - p\frac{\partial x}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u}$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$(23)\qquad \frac{\partial p}{\partial u}(X-x)+\frac{\partial q}{\partial u}(Y-y)=0.$$

Pour exprimer que les courbes (u) et (v) sont conjuguées, il faudra écrire que les équations (22), (23) sont vérifiées quand on y remplace $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Cela donne les deux équations

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial v}=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v},\\ &\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0.\end{aligned}\right.$$

La première est toujours satisfaite, car elle exprime ce fait évident que la tangente à la courbe $u=$ const. se trouve dans le plan tangent. Quant à la seconde, elle est identique à la suivante

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}\right)-p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0$$

ou, plus simplement,

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-q\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Si l'on remarque maintenant que p et q sont déterminés par les équations

$$(26)\qquad \frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v},$$

on pourra éliminer p et q entre les équations (25) et (26), et l'on sera conduit à l'équation

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=0,$$

qui est symétrique par rapport aux trois coordonnées. Cette relation, qui est d'ailleurs nécessaire, est aussi suffisante; car elle exprime qu'il y a des valeurs de p et de q satisfaisant aux équations

(25) et (26), et, d'après les formules (26), p et q seront les dérivées de z, considérée comme fonction de x et de y.

84. On peut formuler la condition trouvée sous une forme différente. L'équation (27) est évidemment le résultat de l'élimination de A et de B entre les trois équations

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - A\frac{\partial x}{\partial u} - B\frac{\partial x}{\partial v} = 0,\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} - A\frac{\partial y}{\partial u} - B\frac{\partial y}{\partial v} = 0,\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - A\frac{\partial z}{\partial u} - B\frac{\partial z}{\partial v} = 0.\end{aligned}\right.$$

Nous obtenons ainsi la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes (u) *et* (v) *soient conjuguées est que les expressions des trois coordonnées rectangulaires en fonction de u et de v satisfassent à une même équation linéaire*

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = A\frac{\partial \theta}{\partial u} + B\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

où A, B *désignent des fonctions quelconques de u et de v.*

Cette proposition, sur laquelle nous aurons à revenir pour la compléter et la généraliser, joue un rôle très important dans la théorie des surfaces.

Si nous l'appliquons aux surfaces qui nous occupent, nous voyons immédiatement que les trois coordonnées satisfont à l'équation

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

et, par conséquent, les deux systèmes de eourbes invariables qui engendrent ici la surface sont des lignes conjuguées. Au reste, la Géométrie permet aussi d'obtenir très simplement ce résultat.

Considérons, en effet, les deux familles de courbes (u) et (v). Dans la translation d'une courbe (u), chaque point M de cette courbe décrit une courbe (v). D'autre part, la tangente en M à la courbe (u) conserve, dans la translation, une direction invariable.

Il suit de là que la développable circonscrite à la surface en tous les points de la courbe (v) décrite par le point M sera le cylindre engendré par la tangente en M à la courbe (u). Cette simple remarque suffit à démontrer que les deux familles de courbes (u) et (v) forment un système conjugué ; et l'on voit de plus que *les développables circonscrites à la surface en tous les points de l'une de ces courbes sont des cylindres, engendrés par les tangentes aux courbes de l'autre famille, menées au point où elles rencontrent la courbe considérée* (¹).

85. Enfin, nous traiterons le cas où la courbe mobile (C) qui engendre la surface est plane, et où les vitesses de tous ses points sont normales au plan. Nous supposerons que l'on ait pris le plan de la courbe pour plan des xy du trièdre mobile. On doit alors, dans les formules (15) et (16), introduire les hypothèses

$$z = 0, \qquad \xi = \eta = r = 0. \tag{31}$$

Si l'on admet, de plus, que l'on a choisi pour u l'arc de la courbe (C), on aura encore

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

et l'expression de l'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = du^2 + (\zeta + py - qx)^2 dv^2. \tag{32}$$

Quant aux projections de l'arc décrit par un point quelconque M de la surface, elles seront, d'après les formules (15),

$$dx, \quad dy, \quad (\zeta + py - qx)\,dv.$$

La normale à la surface sera dans le plan de la courbe, et ce plan roulera sur une certaine surface développable.

On reconnaît les surfaces étudiées par Monge d'une manière détaillée (²).

Les lignes de courbure de l'un des systèmes sont les diverses

(¹) S. Lie, *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen* (*Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 332-337).

(²) Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, 5ᵉ édition, p. 322. *De la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque.*

positions de la courbe mobile; celles du second système sont les trajectoires des différents points de cette courbe.

86. Considérons, en particulier, le cas où le plan de la courbe mobile roule sur un cylindre. On obtient alors une *surface moulure*. Si nous supposons que l'axe des x du trièdre mobile ait été pris parallèle aux génératrices du cylindre, la rotation du système se fera autour d'une parallèle à l'axe des x, et l'on aura

$$q = 0.$$

L'élément linéaire donné par la formule (32) prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{\zeta}{p} + y\right)^2 p^2 \, dv^2$$

ou, en changeant les notations,

$$ds^2 = du^2 + (\mathrm{U} - \mathrm{V})^2 \, dv^2, \tag{33}$$

U et V désignant des fonctions qui dépendent respectivement de u et de v.

On peut donner des surfaces moulures une autre définition, à quelques égards plus simple que la précédente.

Quand le plan de la courbe (C) roule sur le cylindre, les trajectoires de ses différents points sont évidemment des courbes planes dont le plan est parallèle à la section droite du cylindre, et, de plus, ces trajectoires sont à chaque instant normales au plan de la courbe (C). Il est évident, d'après cela, que leurs projections sur le plan de la section droite du cylindre constitueront une famille de courbes planes parallèles admettant pour développée commune la section droite du cylindre. De là résulte la génération suivante des surfaces moulures :

On donne dans un plan une famille de courbes parallèles. Si l'on imprime à chacune de ces courbes une translation finie, normale au plan et variant suivant une loi donnée, quand on passe d'une courbe à l'autre, les positions nouvelles de toutes ces courbes forment la surface moulure.

87. En s'appuyant sur cette définition, on peut montrer que la

forme (33) de l'élément linéaire convient toujours à une infinité de surfaces moulures.

En effet, écrivons l'expression de ds^2 sous la forme

$$ds^2 = dU^2 + (U - V)^2 dv^2 + (1 - U'^2) du^2.$$

Les deux premiers termes pris isolément constituent l'élément linéaire d'une surface développable, et nous avons vu (n° 70) qu'en posant

$$(34)\quad \begin{cases} x = U\cos v + \int V \sin v\, dv, \\ y = U \sin v - \int V \cos v\, dv, \end{cases}$$

on aurait

$$dx^2 + dy^2 = dU^2 + (U - V)^2 dv^2.$$

La surface définie par les formules (34), jointes à la suivante

$$(34)'\quad z = \int \sqrt{1 - U'^2}\, du,$$

aura donc l'élément linéaire exprimé par la formule (33).

Si l'on remarque que cet élément linéaire ne change pas de forme quand on y remplace v par av, on reconnaît la possibilité d'introduire une constante arbitraire dans les formules précédentes et l'on trouve, en recommençant le calcul,

$$(35)\quad \begin{cases} x = aU\cos\dfrac{v}{a} + \int V \sin\dfrac{v}{a}\, dv, \\ y = aU \sin\dfrac{v}{a} - \int V \cos\dfrac{v}{a}\, dv, \\ z = \int \sqrt{1 - a^2 U'^2}\, du. \end{cases}$$

Ces formules définissent une famille de surfaces moulures, toutes applicables les unes sur les autres ([1]).

88. La méthode cinématique que nous venons d'appliquer à de nombreux exemples s'étend au cas où l'on considère une courbe qui varie de forme en même temps qu'elle est entraînée dans le mouvement des axes mobiles. Il suffira en effet, dans les formules

---

([1]) BOUR, *Théorie de la déformation des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX[e] Cahier, p. 89).

(15) qui donnent les projections du déplacement sur les axes mobiles, de regarder x, y, z, non plus comme des fonctions de la seule variable u, mais comme des fonctions de u et de v.

Proposons-nous, par exemple, d'appliquer cette méthode aux surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle. Le plan de ce cercle enveloppera une surface développable. Étudions le mouvement du trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale en un point de l'arête de rebroussement de cette développable. En prenant comme variable indépendante l'arc de la courbe, on aura ici (n° 4)

$$\xi = 1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$
$$p = -\frac{1}{\tau}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{1}{\rho},$$

ρ et τ étant les deux rayons de courbure et de torsion de la courbe. Les projections du déplacement d'un point dont les coordonnées sont x, y, z, relativement aux axes mobiles, auront pour expressions

$$dx + (1 - ry)\,dv,$$
$$dy + (rx - pz)\,dv,$$
$$dz + py\,dv,$$

v désignant l'arc de l'arête de rebroussement.

Le cercle qui engendre la surface se trouvant dans le plan des xy, on peut exprimer les coordonnées d'un de ses points par les formules

$$x = a + \mathrm{R}\cos\varphi,$$
$$y = b + \mathrm{R}\sin\varphi,$$
$$z = 0,$$

où a, b, R sont des fonctions de v, et où φ est la variable qui détermine un point sur chaque cercle. En substituant ces valeurs de x, y, z, on aura, pour les projections du déplacement,

$$-\mathrm{R}\sin\varphi\,d\varphi + (a' + 1 - br + \mathrm{R}'\cos\varphi - r\mathrm{R}\sin\varphi)\,dv,$$
$$\mathrm{R}\cos\varphi\,d\varphi + (b' + ra + \mathrm{R}'\sin\varphi + r\mathrm{R}\cos\varphi)\,dv,$$
$$(pb + p\mathrm{R}\sin\varphi)\,dv,$$

et la somme des carrés de ces projections donnera l'élément li-

néaire de la surface sous la forme [1]

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + 2R[rR + (b' + ra)\cos\varphi - (a' - br + 1)\sin\varphi]\, d\varphi\, dv$$
$$+ [(pb + pR\sin\varphi)^2 + (a' + 1 - br + R'\cos\varphi - rR\sin\varphi)^2$$
$$+ (b' + ra + R'\sin\varphi + rR\cos\varphi)^2]\, dv^2.$$

89. En terminant ce Chapitre, où nous avons étudié surtout des surfaces jouissant de propriétés cinématiques, nous allons donner la définition d'une classe de surfaces se rapprochant à ce point de vue des précédentes, et qui ont d'abord été étudiées par M. Maurice Lévy [2].

Considérons un système qui se déplace, mais qui varie en même temps de grandeur en restant semblable à lui-même, et proposons-nous de chercher la loi des vitesses de tous ses points à un instant quelconque. Soient P_0, P_1 deux positions infiniment voisines. Construisons la figure P'_1 homothétique à P_1, en prenant l'origine des coordonnées pour centre d'homothétie, le rapport d'homothétie étant tel que P'_1 soit égal à P_0. On peut passer de P_0 à P_1 1° par un déplacement infiniment petit qui amène P_0 en P'_1, 2° par une transformation homothétique ayant l'origine pour centre d'homothétie et transformant P'_1 en P_1. Il suit de là que les vitesses de tous les points du système sont les résultantes de celles qui se produiraient dans le déplacement et de celles qui sont dues à la transformation homothétique. Les premières ont des expressions bien connues

$$\alpha + qz - ry, \quad \beta + rx - pz, \quad \gamma + py - qx.$$

Quant à celles qui sont dues à la transformation homothétique, comme elles ont pour effet de réduire les coordonnées dans le même rapport, elles ont pour expression

$$hx, \quad hy, \quad hz.$$

En résumé, les composantes des vitesses d'un point du système

---

(1) Les surfaces à génératrice circulaire ont été étudiées récemment par M. Demartres (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, p. 123).

(2) Maurice Lévy, *Sur le développement des surfaces dont l'élément linéaire est exprimable par une fonction homogène* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 788).

dans le mouvement considéré auront pour valeurs

$$(36) \quad \begin{cases} V_x = \alpha + hx + qz - ry, \\ V_y = \beta + hy + rx - pz, \\ V_z = \gamma + hz + py - qx. \end{cases}$$

Si nous désignons par k le rapport de similitude du système mobile pris dans sa position actuelle au même système pris dans une position déterminée, on aura évidemment

$$(37) \quad h = \frac{1}{k}\frac{dk}{dt}.$$

Tant que ce paramètre h n'est pas nul, c'est-à-dire tant que le système varie de grandeur, on peut transporter l'origine des coordonnées en un point tel que les termes α, β, γ disparaissent des formules (36). L'interprétation de ces formules met alors en évidence le résultat suivant : les vitesses sont les mêmes que si le corps tournait autour d'une droite et éprouvait en même temps une transformation homothétique par rapport à un point de cette droite. Si l'on choisit pour nouvel axe des z cet axe de rotation, les formules (36) se simplifient et se réduisent à la forme suivante

$$(38) \quad \begin{cases} V_x = hx - ry, \\ V_y = hy + rx, \\ V_z = hz. \end{cases}$$

90. Étudions le cas où l'axe de rotation et le centre d'homothétie demeurent fixes dans toute la suite du mouvement, les paramètres h et r restant constants. Alors les positions successives d'un point déterminé du système mobile seront définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = hx - ry, \qquad \frac{dy}{dt} = hy + rx, \qquad \frac{dz}{dt} = hz.$$

On aura donc, en intégrant,

$$(39) \quad \begin{cases} z = z_0 e^{ht}, \\ x = r_0 e^{ht} \cos(\omega_0 + rt), \\ y = r_0 e^{ht} \sin(\omega_0 + rt). \end{cases}$$

Chaque point du système décrira une courbe tracée sur un

cône de révolution

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \text{const.}$$

ayant pour sommet l'origine et pour axe l'axe de rotation; la projection de la trajectoire sur le plan des xy sera une spirale logarithmique ayant pour pôle l'origine des coordonnées. Si l'on considère la spirale gauche décrite par le point comme appartenant au système mobile et variant de grandeur avec lui, elle glissera sur elle-même pendant toute la durée du mouvement, absolument comme les hélices décrites par les différents points d'un système invariable dans le mouvement hélicoïdal.

Par suite, les surfaces qui admettent pour génératrices les courbes définies par les formules (39) sont évidemment les analogues, dans la théorie qui nous occupe, des surfaces hélicoïdales et des surfaces de révolution.

Prenons pour r_0, ω_0, z_0 des fonctions quelconques d'un paramètre θ. Les formules (39), qui donnent les expressions de x, y, z en fonction de t et de θ, définiront la surface que nous nous proposons d'étudier. Cherchons son élément linéaire, nous trouverons un résultat de la forme

$$ds^2 = e^{2ht}(A\,dt^2 + 2B\,dt\,d\theta + C\,d\theta^2), \tag{40}$$

où A, B, C sont des fonctions de θ définies par les équations

$$\left\{\begin{aligned} A &= r_0^2 h^2 + r^2 r_0^2 + h^2 z_0^2,\\ B &= h z_0 z_0' + h r_0 r_0' + r r_0^2 \omega_0',\\ C &= r_0^2 \omega_0'^2 + z_0'^2 + r_0'^2. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Nous allons transformer cette expression de l'élément linéaire. Posons

$$dt + \frac{B}{A}\,d\theta = \frac{1}{h}\,dv,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$t + \int \frac{B}{A}\,d\theta = \frac{v}{h}.$$

L'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = e^{2v}(A'\,dv^2 + C'\,d\theta^2),$$

A' et C' étant encore des fonctions de θ. Enfin, substituons à θ la

variable u définie par la relation

$$u = \int \sqrt{C'}\, d\theta,$$

A' deviendra une fonction U^2 de u, et nous aurons pour la forme définitive de l'élément linéaire

$$ds^2 = e^{2v}(du^2 + U^2\, dv^2). \tag{42}$$

Nous appellerons *surfaces spirales* les surfaces que nous venons de définir. Elles se rapprochent de la spirale logarithmique par une propriété essentielle et qui résulte de leur définition : comme cette courbe, elles peuvent être agrandies dans un rapport quelconque sans cesser d'être superposables à elles-mêmes.

M. Maurice Lévy a montré que le théorème de Bour s'étend à ces surfaces, qu'il y en a une infinité admettant le même élément linéaire et, par conséquent, applicables les unes sur les autres. On établit cette proposition par un calcul que nous omettons, parce qu'il offre la plus grande analogie avec celui que nous avons développé dans le cas des hélicoïdes.



LIVRE II.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES CONJUGUÉS.

Proposition de M. Kœnigs relative à la détermination, sans aucune intégration, d'une infinité de systèmes conjugués sur toute surface. — Application à la détermination des surfaces admettant un système de lignes de courbure planes dont les plans passent par une droite. — Trajectoires orthogonales d'une famille de cercles. — Caractère projectif et dualistique de la définition des systèmes conjugués. — Liaison entre tout système conjugué et une équation linéaire aux dérivées partielles. — Surfaces sur lesquelles il existe un système conjugué formé de deux familles de courbes planes.

---

91. Dans les différentes surfaces que nous avons étudiées précédemment, nous avons rencontré et employé des systèmes de coordonnées curvilignes très variés : les uns simplement orthogonaux, d'autres à la fois orthogonaux et isométriques, d'autres enfin formés de lignes conjuguées. Il est évident que, sur toute surface, il existe une infinité de systèmes orthogonaux ou de systèmes conjugués ; car, si l'on trace sur une surface une famille quelconque de courbes, leurs trajectoires orthogonales ou leurs trajectoires conjuguées seront définies par une équation différentielle du premier ordre et du premier degré, dont l'intégrale existe, bien qu'il ne soit pas toujours possible de la déterminer. On ne connaît aucune méthode qui permette de construire, sans aucune intégration, un système orthogonal sur une surface quelconque. Au contraire, la belle proposition suivante, due à M. Kœnigs, établit que, quelle que soit la surface considérée, il sera possible,

sans effectuer aucune intégration, d'y tracer un nombre illimité de systèmes conjugués.

Soit (Σ) la surface donnée. Prenons une droite quelconque D dans l'espace. *Les sections de la surface, déterminées par tous les plans qui contiennent la droite* D, *admettront pour lignes conjuguées les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface, ayant leurs sommets sur cette droite.*

En effet, si M est un point de la surface, le plan tangent en M ira couper la droite D en un point A. Le cône circonscrit de sommet A admettra pour génératrice MA, et cette droite, qui est évidemment la conjuguée de la tangente en M à la courbe de contact du cône, est aussi la tangente en M à la section plane de la surface déterminée par la droite D et le point M. La proposition est donc démontrée.

92. Pour en donner dès à présent une application, proposons-nous de déterminer les surfaces pour lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes sont dans des plans qui passent tous par une droite D.

Il résulte de la proposition précédente que les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur la droite D seront nécessairement les lignes de seconde courbure; et, comme ces lignes devront être orthogonales aux premières, chacune d'elles devra couper à angle droit les génératrices du cône dont elle est la courbe de contact. Par conséquent, les lignes de seconde courbure seront sphériques; les sphères qui les contiendront auront leurs centres sur la droite D, et elles seront coupées à angle droit par les lignes de première courbure.

Réciproquement, prenons une famille quelconque de sphères (S) ayant leurs centres sur la droite D. Leurs trajectoires orthogonales seront évidemment des courbes planes, puisque les tangentes à ces trajectoires vont passer par le centre d'une des sphères et rencontrent nécessairement la droite D. Si l'on prend une surface quelconque engendrée par ces trajectoires orthogonales, elle sera une des surfaces cherchées. En effet, soient (t). (t'), (t''), ... une suite de trajectoires et M, M', M'', ... les points où elles coupent à angle droit une même sphère (S). Les tangentes aux trajectoires en M, M', M'', ... iront évidemment concourir

au centre de la sphère (S) et elles engendreront un cône, circonscrit suivant la courbe sphérique MM′M″..., à la surface formée par les trajectoires (t), (t'), (t''),.... Les deux systèmes de lignes conjuguées définies par le théorème de M. Kœnigs se couperont ici à angle droit et seront, par conséquent, les deux systèmes de lignes de courbure.

De là résulte une méthode très simple pour engendrer les surfaces cherchées. Considérons une famille quelconque de sphères ayant leur centre sur la droite D, et proposons-nous de déterminer leurs trajectoires orthogonales. Soit (t) une de ces trajectoires; si on la fait tourner autour de D, de manière à ramener son plan dans un plan fixe, elle ne cessera pas d'être trajectoire orthogonale. Nous sommes donc ramenés à un problème de Géométrie plane : *Trouver les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles ayant leurs centres en ligne droite.* Voici comment on peut le résoudre.

93. Considérons d'une manière générale une famille de cercles, définie par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \tag{1}$$

où a, b, r sont des fonctions d'un paramètre u. Les trajectoires orthogonales satisferont à l'équation

$$\frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b}, \tag{2}$$

et, pour former leur équation différentielle, il faudrait éliminer u entre les équations (1) et (2). Cette élimination est impossible en général; il vaut mieux employer la méthode suivante.

Exprimons x, y en fonction de u et d'une nouvelle variable θ par les formules

$$x=a+r\cos\theta, \qquad y=b+r\sin\theta. \tag{3}$$

La signification de θ est évidente : θ est l'angle que fait, avec l'axe des x, le rayon du cercle qui passe au point où ce cercle est coupé par la trajectoire orthogonale. Des formules (3) on tire les valeurs de dx et de dy, et, en les portant dans l'équation (2),

on obtient pour θ l'équation

$$(4)\qquad \frac{d\theta}{du} = \frac{1}{r}\frac{da}{du}\sin\theta - \frac{1}{r}\frac{db}{du}\cos\theta.$$

qu'il faudra intégrer. Or, si l'on prend comme inconnue

$$(5)\qquad \tang\frac{\theta}{2} = t,$$

on est ramené à une équation de Riccati

$$(6)\qquad 2\frac{dt}{du} = \frac{2}{r}\frac{da}{du}t - \frac{1}{r}\frac{db}{du}(1-t^2).$$

De là résultent plusieurs conséquences. Si l'on connaît une trajectoire seulement d'un système de cercles, on déterminera toutes les autres par deux quadratures; si l'on en connaît deux, il suffira d'une seule quadrature; et enfin la connaissance des trois trajectoires orthogonales permettra de déterminer toutes les autres, sans aucune intégration.

Supposons, d'après cela, que l'on veuille déterminer le système orthogonal le plus général dont une famille soit formée de cercles. On pourra se donner arbitrairement deux des trajectoires orthogonales (C), (C_1). Il existe en effet une famille de cercles coupant deux courbes quelconques à angle droit, et leurs centres se trouvent sur la courbe (L) lieu des points d'où l'on peut mener à (C), (C_1) des tangentes égales. Comme on connaît deux trajectoires orthogonales, il suffira d'une quadrature pour obtenir toutes les autres. On pourra donc obtenir, avec une seule quadrature, l'équation du système orthogonal plan le plus général comprenant une famille de cercles ([1]).

([1]) Dans sa thèse si remarquable, *Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes;* Toulouse, 1882, M. V. Rouquet a même montré que l'on peut obtenir, sans aucun signe de quadrature, l'équation de ce système orthogonal. Considérons, en effet, deux familles de cercles, correspondant respectivement aux systèmes de valeurs a_1, b_1, r_1 et a_2, b_2, r_2 des variables a, b, r. Si l'on a, pour chaque valeur de u,

$$(1)\qquad \frac{da_1}{r_1} = \frac{da_2}{r_2},\qquad \frac{db_1}{r_1} = \frac{db_2}{r_2},$$

les équations de Riccati qui déterminent les trajectoires orthogonales de ces deux

Il y a néanmoins un cas particulier très étendu dans lequel la détermination du système orthogonal n'exigera plus aucune quadrature. C'est celui où l'on saurait *a priori* que, parmi les trajectoires orthogonales de la famille de cercles, doit se trouver une ligne droite ou un cercle (γ); car alors tous les cercles cherchés étant doublement normaux à la ligne droite ou au cercle (γ), cette trajectoire orthogonale particulière devra être comptée pour deux et donnera deux solutions de l'équation de Riccati. Il suffira donc de se donner (γ) et une autre trajectoire orthogonale (C) pour avoir trois solutions de l'équation différentielle.

Signalons encore cette conséquence des raisonnements qui précèdent : lorsqu'on aura un système déterminé de cercles coupant

---

familles de cercles sont les mêmes; et, par conséquent, la connaissance des trajectoires orthogonales de l'une des familles entraîne celle des trajectoires orthogonales de l'autre famille. Nous dirons, avec M. Rouquet, que deux familles de cercles sont *similaires* lorsqu'elles satisfont aux relations (1). Il est aisé d'interpréter géométriquement ces relations. Elles expriment, en effet, que les centres des cercles, qui se correspondent dans les deux familles similaires, décrivent des courbes dont les tangentes sont, à chaque instant, parallèles; et de plus, que les rayons des deux cercles sont dans le même rapport que les arcs infiniment petits parcourus par leurs centres dans le même temps, c'est-à-dire dans le même rapport que les rayons de courbure des deux courbes décrites par leurs centres, aux points correspondants. Cette proposition permet évidemment de construire, *sans aucune intégration*, toutes les familles similaires d'une famille de cercles donnée.

D'après cela, soit une famille quelconque de cercles, correspondant aux valeurs a_1, b_1, r_1 de a, b, r. On peut toujours concevoir qu'il existe trois fonctions a_2, b_2, r_2 telles que l'on ait

$$\frac{da_1}{r_1} = \frac{da_2}{r_2}, \qquad \frac{db_1}{r_1} = \frac{db_2}{r_2}, \qquad a_2^2 + b_2^2 = r_2^2.$$

Par suite, toute famille de cercles peut être considérée comme similaire d'une famille représentée par l'équation

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = a_2^2 + b_2^2,$$

pour laquelle tous les cercles passent par un point fixe, l'origine. Comme on peut mettre en évidence, sans signe de quadrature, les trajectoires orthogonales de cette famille particulière, il en sera de même, d'après les propositions précédentes, pour la famille la plus générale.

Au reste, dans beaucoup de questions, il importe peu qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de signe de quadrature. L'essentiel est qu'on puisse obtenir, sous forme explicite, l'équation du système orthogonal, et les développements donnés dans le texte établissent que cela sera toujours possible.

à angle droit un cercle donné, ou ayant leurs centres en ligne droite, la détermination de leurs trajectoires orthogonales exige seulement une quadrature.

A un autre point de vue, il résulte de l'équation (6) la conséquence suivante; soient $\tang\frac{\theta}{2}$, $\tang\frac{\theta_1}{2}$, $\tang\frac{\theta_2}{2}$, $\tang\frac{\theta_3}{2}$ quatre solutions quelconques de cette équation. Nous savons que leur rapport anharmonique est constant. Or ce rapport anharmonique des quatre tangentes est, par définition, le rapport anharmonique des points où les trajectoires correspondantes coupent l'un quelconque des cercles. On a donc le théorème suivant :

Le rapport anharmonique des quatre points où un cercle quelconque de la famille considérée est coupé par quatre trajectoires orthogonales fixes est constant.

Toutes ces propositions s'appliquent évidemment aux systèmes de cercles tracés sur la sphère, qui peuvent toujours, par une inversion, être transformés en systèmes situés dans un plan.

94. Revenons à la question proposée. Il s'agit de trouver le système orthogonal le plus général dont une des familles soit formée de cercles ayant leurs centres sur une droite D.

Pour cela on considérera une courbe quelconque (C) et l'on tracera tous les cercles normaux à (C), ayant leurs centres sur D. Les trajectoires orthogonales de ces cercles se détermineront sans aucune intégration. Considérons en effet l'un quelconque de ces cercles normal en un point M à la courbe (C). Si θ_0 désigne l'angle de la tangente à la courbe en M avec la droite D, l'équation de Riccati admettra les trois solutions particulières

$$\theta_0, \quad 0, \quad \pi,$$

et, par conséquent, son intégrale générale sera donnée par la formule

$$\frac{\tang\frac{\theta}{2}}{\tang\frac{\theta}{2} - \tang\frac{\theta_0}{2}} = C'$$

ou, plus simplement,

$$(7) \qquad \tang\frac{\theta}{2} = C\tang\frac{\theta_0}{2},$$

Les surfaces cherchées, qui ont d'abord été étudiées par Joachimsthal ([1]), admettent donc la génération suivante : *Dans un plan passant par la droite* D, *on forme, d'après le moyen que nous venons d'indiquer, la famille de courbes planes* (t) *la plus générale admettant pour trajectoires orthogonales une famille de cercles ayant leurs centres sur la droite* D. *On fait tourner ces courbes* (t), *autour de la droite* D, *d'un angle qui varie d'après une loi donnée, mais quelconque, quand on passe d'une courbe à l'autre; le lieu de toutes leurs positions nouvelles est la surface cherchée.*

Prenons pour axe des x la droite D. Les formules qui sont la traduction analytique de la génération précédente sont les suivantes. Soit

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

l'équation du système de cercles. Prenons

$$a=F(\theta_0),\qquad r=F'(\theta_0)\sin\theta_0,\qquad \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=F_1(\psi)\operatorname{tang}\frac{\theta_0}{2}.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la surface cherchée seront

$$(8)\qquad \begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta\cos\psi, \\ z=r\sin\theta\sin\psi. \end{cases}$$

Ces formules sont identiques à celles que l'on doit à Joachimsthal.

95. Après avoir développé une application de la proposition de M. Kœnigs, revenons aux systèmes conjugués quelconques. Ces systèmes possèdent deux propriétés essentielles sur lesquelles il convient que nous insistions, et que l'on peut énoncer comme il suit : *Tout système conjugué ne cesse pas d'être conjugué si l'on soumet la surface sur laquelle il est tracé, soit à une trans-*

([1]) JOACHIMSTHAL, *Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium* (*Journal de Crelle*, t. XXX, p. 347) et *Sur les surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont planes* (même Journal, t. LIV, p. 181). Voir surtout ce dernier article.

formation homographique, soit à une transformation par polaires réciproques.

Supposons d'abord que l'on soumette une surface (S) à une transformation homographique. Considérons une courbe (C) tracée sur (S). Les plans tangents à la surface en tous les points de cette courbe engendreront une surface développable (Δ) dont les génératrices rectilignes seront les conjuguées des tangentes à la courbe (C). Or il est évident que la transformation homographique ne change en rien toutes ces relations. A la surface (S) correspond une surface (S'), à la courbe (C) une courbe (C'), à la développable (Δ) une développable (Δ') circonscrite à (S') suivant la courbe (C'), aux tangentes de la courbe (C) celles de la courbe (C'), aux génératrices de (Δ) celles de (Δ'); par conséquent la transformation homographique fait bien correspondre à deux tangentes conjuguées de (S) deux tangentes conjuguées de (S').

Si, au contraire, on effectue une transformation par polaires réciproques, à la surface (S) correspond une surface (S''), à la courbe (C) une développable (Δ'') circonscrite à (S''), et à la développable (Δ) la courbe de contact (C'') de la développable (Δ''). Par suite, aux tangentes de la courbe (C) correspondent les génératrices rectilignes de (Δ'') et aux génératrices de (Δ) les tangentes de la courbe (C''). D'ailleurs, à deux tangentes en un point M de (S), correspondent deux tangentes au point correspondant M'' de (S''). Ici encore, on le voit, à deux droites conjuguées correspondent deux droites conjuguées.

96. Les propriétés précédentes, que l'on exprime encore en disant que la définition des systèmes conjugués est projective et dualistique, peuvent aussi être établies par la méthode analytique suivante qui nous permettra de généraliser une proposition déjà donnée (n° 84).

Soient α et β les paramètres de deux familles de courbes tracées sur une surface (S). Adoptons un système de coordonnées homogènes ou tétraédriques absolument quelconque, et soit

$$uX + vY + wZ + pT = 0 \tag{10}$$

l'équation du plan tangent à la surface; u, v, w, p seront des

fonctions des paramètres α et β, et l'on obtiendrait l'équation en coordonnées ponctuelles de la surface (S) en éliminant α et β entre l'équation (10) et ses deux dérivées

$$(11)\qquad \begin{cases} X\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}+Y\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}+Z\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}+T\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}=0,\\[2mm] X\dfrac{\partial u}{\partial\beta}+Y\dfrac{\partial v}{\partial\beta}+Z\dfrac{\partial w}{\partial\beta}+T\dfrac{\partial p}{\partial\beta}=0,\end{cases}$$

par rapport à α et à β. Par conséquent, si l'on désigne par x, y, z, t les coordonnées du point de contact du plan tangent, elles devront satisfaire aux trois équations

$$(12)\qquad \begin{cases} ux+vy+wz+pt=0,\\[2mm] x\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}+y\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}+z\dfrac{\partial w}{\partial\alpha}+t\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}=0,\\[2mm] x\dfrac{\partial u}{\partial\beta}+y\dfrac{\partial v}{\partial\beta}+z\dfrac{\partial w}{\partial\beta}+t\dfrac{\partial p}{\partial\beta}=0.\end{cases}$$

Différentions la première de ces équations, successivement par rapport à α et à β; on aura, en tenant compte des deux autres, les relations nouvelles

$$(13)\qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}+v\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}+w\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}+p\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}=0,\\[2mm] u\dfrac{\partial x}{\partial\beta}+v\dfrac{\partial y}{\partial\beta}+w\dfrac{\partial z}{\partial\beta}+p\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}=0.\end{cases}$$

On aurait pu d'ailleurs écrire immédiatement ces équations; elles expriment que les tangentes aux deux courbes $\alpha=$ const., $\beta=$ const. sont dans le plan tangent à la surface.

Les équations (12) et (13) s'appliquent à tout système de coordonnées curvilignes. Cherchons maintenant la condition pour que les deux familles (α) et (β) forment un système conjugué. Si l'on se déplace sur la courbe $\alpha=$ const., le plan tangent enveloppera une surface développable; son intersection avec le plan tangent infiniment voisin sera définie par l'équation (10) jointe à la seconde des équations (11). Il faut exprimer que la droite représentée par ces deux équations est la tangente à la courbe $\beta=$ const. Pour cela, il faudra écrire que ces équations sont vérifiées quand on y

remplace X, Y, Z, T par

$$x + \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha, \quad y + \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha, \quad z + \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha, \quad t + \frac{\partial t}{\partial \alpha} d\alpha.$$

En tenant compte des formules déjà établies (12) et (13), cela ne donne qu'une seule équation nouvelle

$$(14) \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0,$$

et cette unique équation exprime par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles (α) et (β) forment un système conjugué.

Des formules (12) et (13) on déduit par différentiation les identités suivantes applicables à tout système de coordonnées curvilignes :

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} + y\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} + z\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} + t\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ & = -\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \beta} \\ & = -\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ & = \quad u\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + v\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} + w\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} + p\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha\, \partial \beta}. \end{aligned} \right.$$

Il suit de là que l'équation (14) peut encore être écrite sous l'une des trois formes suivantes :

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \beta} = 0, \\ & u\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + v\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} + w\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} + p\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \\ & x\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} + y\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} + z\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} + t\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \end{aligned} \right.$$

La condition pour que les familles (α), (β) forment un système conjugué s'exprime indifféremment par l'une quelconque des quatre équations (14) ou (16).

97. Considérons, en particulier, les équations (12) et la troisième des équations (16); elles ne contiennent pas les dérivées de x, y,

z, t et l'élimination de ces coordonnées conduit à l'équation

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ v & \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ w & \frac{\partial w}{\partial \alpha} & \frac{\partial w}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ p & \frac{\partial p}{\partial \alpha} & \frac{\partial p}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha\, \partial \beta} \end{vmatrix} = 0,$$

qui ne contient plus que les coordonnées tangentielles [1].

Inversement, toutes les fois que l'équation (17) sera satisfaite, il existera des valeurs de x, y, z, t vérifiant les équations (12) et la troisième des équations (16); ces équations expriment que x, y, z, t sont les coordonnées du point de contact du plan défini par l'équation (10) avec la surface qu'il enveloppe et, en outre, que les deux familles (α), (β) tracées sur cette enveloppe sont conjuguées. L'équation (17) est donc, dans tous les cas, caractéristique des systèmes conjugués.

De même, en éliminant u, v, w, p entre la première des équations (12), les deux équations (13) et la seconde équation (16), on trouvera la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées ponctuelles

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha\, \partial \beta} \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on démontrera comme précédemment que cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante.

---

[1] BRIOSCHI, *Sulle linee di curvatura della superficie delle onde* (*Annales de Tortolini*, t. II, p. 135; 1859).

98. En répétant le raisonnement déjà donné au n° **84**, on obtiendra immédiatement la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de courbes, de paramètres α *et* β, *soient conjuguées, est que, soit les coordonnées ponctuelles homogènes, soit les coordonnées tangentielles, satisfassent toutes les quatre à une équation aux dérivées partielles de la forme*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+B\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+C\theta=0, \tag{19}$$

où A, B, C *désignent des fonctions quelconques de* α *et de* β [1].

La transformation homographique ne changeant pas les coordonnées homogènes, pourvu que l'on fasse varier le tétraèdre et les paramètres de référence, et la transformation par polaires réciproques étant équivalente à un échange des coordonnées ponctuelles et des coordonnées tangentielles, on voit que la méthode précédente met bien en évidence le caractère projectif et dualistique de la définition des systèmes conjugués.

Si l'on emploie les coordonnées cartésiennes ordinaires, la coordonnée t devra être égalée à l'unité; par suite l'équation (19) devra être vérifiée par la valeur $\theta = 1$. On devra avoir

$$C = 0$$

et l'on retrouvera le résultat du n° **84**.

99. En terminant ces développements, je remarquerai qu'il est impossible de trouver deux équations de la forme (19) auxquelles satisferont en même temps les quatre coordonnées ponctuelles, tant que la surface ne se réduira pas à une courbe, ou les quatre coordonnées tangentielles, tant que la surface ne sera pas développable.

En effet, supposons que les quatre coordonnées vérifient deux

---

[1] Il est utile de remarquer que l'équation linéaire à laquelle satisfont les quatre coordonnées ponctuelles n'est pas, en général, la même que celle à laquelle satisfont les quatre coordonnées tangentielles.

équations linéaires de la forme (19). L'élimination de $\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ entre ces deux équations nous conduira à une équation du premier ordre

$$A'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+B'\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+C'\theta=0,$$

à laquelle devront encore satisfaire ces coordonnées. Or la solution générale de cette équation est de la forme

$$\theta=\theta_0\,F(\sigma_0),$$

F désignant une fonction arbitraire et θ_0, σ_0 des fonctions déterminées; par conséquent, si l'on divise toutes les coordonnées homogènes par θ_0, on les réduira à des fonctions de la seule variable σ_0. Si les coordonnées sont ponctuelles, le point décrit une courbe, et si elles sont tangentielles, le plan enveloppe une développable.

Ainsi, à toute surface non développable, et à tout système conjugué tracé sur cette surface, correspondent deux équations, et deux seulement, de la forme (19). L'une est vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de la surface, et l'autre par les coordonnées d'un plan tangent quelconque de la surface.

100. Le théorème précédent permet évidemment de construire une infinité de surfaces sur lesquelles on connaîtra des systèmes conjugués ([1]). Nous allons, dès à présent, en faire une application en cherchant les surfaces pour lesquelles il existe deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes.

Si les coordonnées tangentielles satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,$$

la surface correspondante la plus générale sera l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$(20)\quad \begin{cases} [f_1(\alpha)+\varphi_1(\beta)]x+[f_2(\alpha)+\varphi_2(\beta)]y \\ \qquad +[f_3(\alpha)+\varphi_3(\beta)]z+[f_4(\alpha)+\varphi_4(\beta)]t=0. \end{cases}$$

([1]) DARBOUX, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. VII, p. 293; 1878).

Or on reconnaît sans difficulté que cette surface jouit de la propriété indiquée; car, pour avoir l'enveloppe du plan tangent, il faut joindre à l'équation (20) les deux suivantes

$$(21)\qquad \begin{cases} f_1'(\alpha)x + f_2'(\alpha)y + f_3'(\alpha)z + f_4'(\alpha)t = 0, \\ \varphi_1'(\beta)x + \varphi_2'(\beta)y + \varphi_3'(\beta)z + \varphi_4'(\beta)t = 0, \end{cases}$$

qui ne contiennent chacune qu'une seule des variables α, β et montrent ainsi que les deux familles conjuguées $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont composées de courbes planes.

La solution que nous venons d'obtenir est très générale; on peut démontrer qu'il n'y en a pas d'autre. Pour cela, nous définirons la surface cherchée comme enveloppe du plan

$$(22)\qquad u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z} + p\mathrm{T} = 0.$$

Prenons la dérivée de cette équation par rapport à α, nous aurons

$$(23)\qquad \mathrm{X}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \mathrm{Y}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \mathrm{Z}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \mathrm{T}\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0.$$

Ces deux équations représentent, on l'a vu, la tangente à la courbe $\alpha = \text{const.}$, toutes les fois que les deux familles (α), (β) sont conjuguées.

Or, si les courbes de paramètre α sont planes, elles seront déterminées par une équation de la forme

$$(24)\qquad \mathrm{X}f_1(\alpha) + \mathrm{Y}f_2(\alpha) + \mathrm{Z}f_3(\alpha) + \mathrm{T}f_4(\alpha) = 0,$$

et, par conséquent, les trois plans définis par les équations (22), (23), (24) contiendront une même droite, la tangente à la courbe $\alpha = \text{const.}$; l'une de ces trois équations devra donc être une combinaison linéaire des deux autres. Écrivons que la troisième s'obtient en ajoutant les deux autres, respectivement multipliées par μ et par λ; nous aurons le système

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \mu u + \lambda\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ f_2(\alpha) &= \mu v + \lambda\frac{\partial v}{\partial \alpha}, \\ f_3(\alpha) &= \mu w + \lambda\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ f_4(\alpha) &= \mu p + \lambda\frac{\partial p}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

En éliminant par une différentiation les fonctions $f_1(\alpha)$, ... on verra que u, v, w, p doivent satisfaire à la même équation du second ordre

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\mu\theta + \lambda\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(25) \qquad \lambda\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + \mu\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \theta\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0.$$

En considérant de même les courbes $\beta = \text{const.}$, on trouverait que les coordonnées tangentielles doivent aussi satisfaire à l'équation semblable

$$(26) \qquad \lambda'\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \mu'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\lambda'}{\partial\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \theta\frac{\partial\mu'}{\partial\alpha} = 0.$$

Or nous avons vu que u, v, w, p ne peuvent satisfaire en même temps à deux équations de la forme précédente, au moins tant que la surface n'est pas développable. Il faudra donc que les équations (25), (26) soient identiques; ce qui donne les conditions

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\partial\log\lambda}{\partial\beta}, \qquad \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\partial\log\lambda'}{\partial\alpha}, \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial\mu'}{\partial\alpha}.$$

En portant les valeurs de μ et de μ' dans la dernière équation, nous trouvons

$$\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial^2\log\lambda'}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$\lambda' = \lambda f(\alpha)\varphi(\beta),$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} + \lambda\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

Si nous portons cette valeur de μ dans l'équation (25), elle prend la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}[\lambda f(\alpha)\theta] = 0.$$

On voit que, si nous multiplions les quatre coordonnées u, v, w, p par une même fonction $\lambda f(\alpha)$, ce qui est évidemment permis,

elles satisferont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0,$$

et l'on retrouve la solution que nous avons donnée *a priori*.

Il est vrai que nous avons écarté de notre raisonnement l'hypothèse où la surface serait développable. Mais, pour obtenir une telle surface, il suffira de supposer nulles, dans la formule (20), toutes les fonctions de β. Ainsi notre première solution donne, sans aucune exception, toutes les surfaces pour lesquelles il peut exister un système conjugué composé de deux familles de courbes planes.

101. Il nous reste à indiquer un mode de génération simple des surfaces que nous venons d'obtenir. Pour cela, faisant $t = 1$, nous envisagerons les deux familles de sphères définies par les équations

$$(27) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2f_1(\alpha)x - 2f_2(\alpha)y - 2f_3(\alpha)z - 2f_4(\alpha) = 0,$$
$$(28) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2\varphi_1(\beta)x + 2\varphi_2(\beta)y + 2\varphi_3(\beta)z + 2\varphi_4(\beta) = 0.$$

Ces deux familles de sphères sont absolument quelconques, et d'ailleurs leur plan radical est précisément le plan tangent de la surface cherchée, représenté par l'équation (20). Nous sommes donc conduits au théorème suivant :

Si l'on considère dans l'espace deux familles de sphères définies de la manière la plus générale, le plan radical d'une des sphères de la première famille et d'une des sphères de la seconde enveloppera la surface la plus générale admettant deux familles conjuguées formées exclusivement de courbes planes.

Pour déterminer la surface par points, on remarque que les deux équations (21) sont les dérivées par rapport à α et à β des équations (27), (28). Donc :

Si l'on associe à deux sphères de famille différente les sphères infiniment voisines, le centre radical de ces quatre sphères décrira la surface cherchée. Le plan radical de deux sphères infiniment voisines de la même famille contiendra une des courbes de l'un des systèmes conjugués.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES CONJUGUÉS. — LIGNES ASYMPTOTIQUES.

Application des propositions précédentes à la détermination des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. — Caractéristiques d'une équation linéaire aux dérivées partielles. — Théorème nouveau relatif aux systèmes conjugués. — Lignes asymptotiques. — Forme la plus simple de leur équation différentielle. — Leur détermination dans des cas particuliers. — Surfaces tétraédrales de Lamé.

---

102. La proposition obtenue à la fin du Chapitre précédent conduit à une méthode très simple pour la détermination des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans les deux systèmes. Il suffira, en effet, de chercher, parmi les surfaces enveloppes du plan représenté par l'équation (20), celles pour lesquelles les deux familles de courbes conjuguées se coupent à angle droit.

Considérons la surface enveloppe du plan

$$uX + vY + wZ + pT = 0,$$

où u, v, w, p sont des fonctions de α et de β. La condition d'orthogonalité des courbes de paramètre α et β tracées sur l'enveloppe est compliquée en général, et contient les dérivées secondes des coordonnées tangentielles. Mais elle se simplifie beaucoup quand α et β sont les paramètres de deux familles conjuguées. En effet, si x, y, z, t sont les coordonnées du point de contact et si l'on fait $t = 1$, on a les deux équations

$$u\frac{\partial x}{\partial \alpha} + v\frac{\partial y}{\partial \alpha} + w\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

d'où l'on déduit les proportions

$$(1) \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha} : \frac{\partial z}{\partial \alpha} :: v\frac{\partial w}{\partial \beta} - w\frac{\partial v}{\partial \beta} : w\frac{\partial u}{\partial \beta} - u\frac{\partial w}{\partial \beta} : u\frac{\partial v}{\partial \beta} - v\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

On a des formules analogues pour $\frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial y}{\partial \beta}, \frac{\partial z}{\partial \beta}$ et, en écrivant la condition d'orthogonalité, on trouve l'équation ([1])

$$(2)\quad \begin{cases} \left(u\frac{\partial u}{\partial \alpha}+v\frac{\partial v}{\partial \alpha}+w\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial \beta}+v\frac{\partial v}{\partial \beta}+w\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) \\ \quad -(u^2+v^2+w^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)=0. \end{cases}$$

Remarquons toutefois que cette équation serait illusoire si u, v, w, p ne contenaient pas β, car alors les formules (1) n'auraient aucune signification; la surface serait développable.

Pour appliquer l'équation (2) au problème qui nous occupe, il faut faire

$$u = A_1 + B_1, \qquad v = A_2 + B_2, \qquad w = A_3 + B_3,$$

A_1, A_2, A_3 désignant des fonctions de α et B_1, B_2, B_3 des fonctions de β. On reconnaît que l'équation (2) peut être ramenée à ne contenir que les dérivées de la fonction h définie par l'équation

$$h^2 = u^2 + v^2 + w^2 = (A_1+B_1)^2 + (A_2+B_2)^2 + (A_3+B_3)^2.$$

En effet, cette équation différentiée par rapport à α et à β donne successivement

$$h\frac{\partial h}{\partial \alpha} = u\frac{\partial u}{\partial \alpha}+v\frac{\partial v}{\partial \alpha}+w\frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

$$h\frac{\partial h}{\partial \beta} = u\frac{\partial u}{\partial \beta}+v\frac{\partial v}{\partial \beta}+w\frac{\partial w}{\partial \beta},$$

$$h\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial h}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}.$$

En tenant compte de ces relations, l'équation (2) prend la forme

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha\,\partial \beta} = 0,$$

et il faut, pour qu'elle soit satisfaite, que l'on ait

$$h = A_4 + B_4.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour obtenir les surfaces à lignes de courbure planes dans

([1]) Brioschi, *Annales de Tortolini*, t. II, p. 135; 1859.

les deux systèmes, on commencera par déterminer les fonctions de α *et de* β *satisfaisant identiquement à l'équation*

$$(3) \qquad (A_1+B_1)^2+(A_2+B_2)^2+(A_3+B_3)^2=(A_4+B_4)^2.$$

Quand ces fonctions seront connues, la surface sera l'enveloppe du plan représenté par l'équation

$$(4) \qquad (A_1+B_1)x+(A_2+B_2)y+(A_3+B_3)z=A+B,$$

où A, B *désignent deux fonctions nouvelles qui dépendent respectivement de* α *et de* β. *Les lignes de courbure des deux systèmes seront définies par les équations*

$$(5) \qquad \begin{cases} A'_1 x + A'_2 y + A'_3 z = A', \\ B'_1 x + B'_2 y + B'_3 z = B', \end{cases}$$

qui ne contiennent chacune qu'une seule des variables α *ou* β *et représentent les plans de ces lignes.*

103. Toute la difficulté du problème est ramenée, par la méthode précédente, à la détermination des fonctions les plus générales satisfaisant identiquement à la relation (3). Or, si l'on différentie cette équation successivement par rapport à α et à β, on est ramené à l'équation plus simple

$$(6) \qquad A'_1 B'_1 + A'_2 B'_2 + A'_3 B'_3 = A'_4 B'_4,$$

dont M. J.-A. Serret a donné toutes les solutions possibles dans son important Mémoire *Sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XVIII, p. 116). Au lieu de suivre la marche adoptée par M. Serret, nous nous attacherons à l'équation (3) que nous écrirons sous la forme

$$(7) \qquad (A_1-B_1)^2+(A_2-B_2)^2+(A_3-B_3)^2=(A_4-B_4)^2,$$

en changeant le signe de toutes les fonctions B.

Cette équation peut être interprétée géométriquement de la manière suivante. Considérons la sphère (S), variable et dépendante du paramètre α, dont le centre a pour coordonnées A_1, A_2, A_3 et dont le rayon est égal, en grandeur et en signe, à A_4; considérons de même la sphère (S'), dépendante du paramètre β,

dont le centre a pour coordonnées B_1, B_2, B_3 et dont le rayon est égal à B_4. L'équation (7) exprime évidemment que les deux sphères (S) et (S') sont constamment tangentes. Il faut donc que ces deux sphères, envisagées successivement, enveloppent la même surface (Σ). Et, comme cette surface (Σ) est touchée suivant un cercle par chacune des sphères (S), aussi bien que par chacune des sphères (S'), il faut que *toutes ses lignes de courbure soient circulaires.*

Nous sommes ainsi ramenés à un problème bien connu, qui a été proposé et résolu pour la première fois par Dupin (¹) : *Déterminer toutes les surfaces dont les lignes de courbure sont circulaires.* La solution fournit une surface du quatrième ordre, la *cyclide de Dupin,* dont les normales rencontrent une ellipse et une hyperbole, qui sont les focales l'une de l'autre et qui contiennent les centres de toutes les sphères, tangentes à la surface suivant une de ses lignes de courbure. Cette surface peut dégénérer soit en un tore, et alors l'ellipse focale se réduit à un cercle, soit en une surface de troisième degré, et, dans ce cas, les deux courbes focales deviennent des paraboles.

104. Si l'on suppose que l'ellipse se réduise à un cercle, l'hyperbole se réduira à une droite passant par le centre du cercle et perpendiculaire à son plan. En choisissant le centre du cercle pour origine des coordonnées et la droite pour axe des z, nous obtenons une première solution de l'équation (7) donnée par les formules suivantes :

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = \alpha,$$
$$B_1 = \cos\beta, \qquad B_2 = \sin\beta, \qquad B_3 = 0.$$

La surface à lignes de courbure planes correspondante est l'enveloppe du plan

$$\alpha z - x\cos\beta - y\sin\beta = f(\alpha) + \varphi(\beta). \tag{8}$$

Les lignes de courbure $\alpha =$ const. sont dans des plans parallèles

$$z = f'(\alpha),$$

(¹) DUPIN, *Applications de Géométrie et de Méchanique,* p. 200 et suiv.; 1822.

et, par conséquent, cette première classe ne comprend que les surfaces moulures déjà étudiées (n° 86).

Passons au cas général où l'une des focales est une ellipse. Comme on peut multiplier toutes les fonctions A_i, B_i par un même nombre, on pourra prendre, pour cette focale, les équations

$$x^2 + \frac{z^2}{\lambda^2} = 1, \qquad y = 0,$$

et l'hyperbole correspondante sera alors représentée par le système

$$x = 0, \qquad y^2 - \frac{z^2}{\lambda^2 - 1} = -1.$$

Un point de la première courbe sera défini par les formules

$$(9) \qquad x = A_1 = \alpha, \qquad y = A_2 = 0, \qquad z = A_3 = \lambda\sqrt{1 - \alpha^2},$$

et, de même, un point de la seconde par les formules analogues

$$(10) \qquad x = B_1 = 0, \qquad y = B_2 = \beta, \qquad z = B_3 = \sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1 + \beta^2}.$$

La surface à lignes de courbure planes, correspondante à ces valeurs des fonctions A_i, B_i, sera l'enveloppe du plan

$$(11) \qquad \alpha x - \beta y + (\lambda\sqrt{1 - \alpha^2} - \sqrt{\lambda^2 - 1}\sqrt{1 + \beta^2})z = f(\alpha) - \varphi(\beta),$$

lorsque α et β varieront.

On trouvera de même, dans le cas où l'ellipse se réduit à une parabole, que la surface correspondante est l'enveloppe du plan

$$(12) \qquad 2\alpha x + 2\beta y + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z = f(\alpha) + \varphi(\beta).$$

105. En résumé, nous obtenons trois classes de surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Mais il résulte clairement des raisonnements précédents que la première et la troisième peuvent être considérées comme des cas limites de la seconde, qui est définie par la formule (11). Nous allons faire connaître un nouveau mode de génération de ces surfaces.

Si l'on différentie successivement par rapport à α et à β l'équation (11), on obtient les deux équations

$$(13) \qquad x - \frac{\lambda\alpha z}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = f'(\alpha),$$

$$(14) \qquad y + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}\,\beta z}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \varphi'(\beta),$$

qui représentent, nous l'avons vu, les plans des lignes de première et de seconde courbure. Ainsi les lignes de courbure de chaque système sont dans les plans tangents d'un cylindre, et les cylindres correspondants aux deux systèmes ont leurs génératrices perpendiculaires.

D'autre part, les deux familles de sphères considérées au n° **101** ont ici pour équations

$$(15)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\lambda\sqrt{1-\alpha^2}\,z+2f(\alpha)=0, \\ x^2+y^2+z^2-2\beta y-2\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1+\beta^2}\,z+2\varphi(\beta)=0; \end{cases}$$

les centres de ces sphères sont situés respectivement sur les deux focales. D'ailleurs leurs rayons dépendent des fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ et varient, par conséquent, suivant une loi quelconque. En appliquant le théorème du n° **101**, on sera donc conduit à la proposition suivante :

Pour obtenir toutes les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, on construira deux familles différentes de sphères dont les centres seront assujettis à décrire respectivement deux courbes du second degré, focales l'une de l'autre, et dont les rayons varieront suivant une loi quelconque pour chacune des deux familles. Le plan radical de deux sphères (S), (Σ), *appartenant aux deux familles différentes, enveloppera la surface cherchée. Si l'on associe à* (Σ) *et à* (S) *les sphères infiniment voisines* (Σ'), (S'), *le centre radical de ces quatre sphères décrira la surface; les plans radicaux de* (S) *et de* (S'), *de* (Σ) *et de* (Σ') *seront les plans des lignes de courbure des deux systèmes* [1].

Bien que nos raisonnements aient laissé de côté le cas des surfaces développables, les résultats obtenus comprennent ces surfaces qui sont, on le reconnaîtra aisément, des surfaces moulures formées par les tangentes d'une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

---

[1] On peut définir la variation du rayon des sphères de chacune des familles en assujettissant ces sphères à être tangentes à une courbe choisie arbitrairement, située dans le plan de la ligne qui contient leurs centres. Alors on pourra construire géométriquement le plan radical de chaque sphère et de la sphère infiniment voisine.

106. Nous terminerons cette étude préliminaire des systèmes conjugués en généralisant la proposition donnée au n° 98, et, pour le faire d'une manière précise, nous commencerons par rappeler la définition des caractéristiques d'une équation linéaire aux dérivées partielles.

Soit

$$(16) \qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} + A'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B'\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C'\theta = 0$$

une telle équation, où les coefficients seront des fonctions données quelconques de α et de β. Si l'on substitue à ces variables indépendantes les suivantes :

$$\rho = \varphi(\alpha, \beta), \qquad \rho_1 = \psi(\alpha, \beta),$$

l'équation conservera sa forme et deviendra

$$a\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + b\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + c\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1^2} + a'\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b'\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + c'\theta = 0,$$

a, b, c ayant les valeurs suivantes :

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} a &= A\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\right)^2 + B\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\beta} + C\left(\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\right)^2, \\ b &= 2A\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha} + B\left(\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta} + \frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}\right) + 2C\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}, \\ c &= A\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}\right)^2 + B\frac{\partial\rho_1}{\partial\alpha}\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta} + C\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial\beta}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Si donc on veut faire disparaître les deux termes en $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1^2}$, ρ et ρ_1 devront être deux fonctions différentes satisfaisant à l'équation

$$(18) \qquad A\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)^2 + B\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + C\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)^2 = 0.$$

On peut énoncer ce résultat de la manière suivante :

Considérons l'équation différentielle du premier ordre et du second degré

$$(19) \qquad A\,d\beta^2 - B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\alpha^2 = 0,$$

*à laquelle nous donnerons le nom d'*équation différentielle des caractéristiques, *et qui se décompose en deux équations*

du premier degré admettant chacune une intégrale. Soient

$$\rho = \varphi(\alpha, \beta), \qquad \rho_1 = \psi(\alpha, \beta)$$

les deux intégrales ainsi obtenues; il faudra prendre ρ, ρ_1 *pour nouvelles variables si l'on veut ramener l'équation en* θ *à la forme*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + a'\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b'\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + c'\theta = 0. \tag{20}$$

On voit que la transformation serait impossible si le premier membre de l'équation (19) était un carré parfait. Mais il résulte des formules (17) que si l'on prend alors pour ρ l'intégrale unique de l'équation (19), l'équation en θ se réduit à la forme simple [1]

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\rho_1^2} + a'\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + b'\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + c'\theta = 0. \tag{21}$$

107. Après avoir rappelé ces définitions et ces propriétés, revenons aux questions que nous avons en vue, et supposons que les quatre coordonnées homogènes x, y, z, t ou u, v, w, p soient

---

[1] On peut même simplifier encore cette équation dès que l'on en connaît des solutions particulières; car soient θ_1, θ_2 deux de ces solutions : si l'on prend comme nouvelles variables indépendantes ρ et le rapport

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \rho'_1,$$

et si l'on pose

$$\theta = \theta_1\sigma,$$

la fonction σ satisfera à une équation de même forme que l'équation (21)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial\rho_1'^2} + a_1\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + b_1\frac{\partial\sigma}{\partial\rho'_1} + c_1\sigma = 0.$$

Mais, comme cette équation doit admettre les solutions particulières

$$\sigma = 1, \qquad \sigma = \rho'_1,$$

b_1 et c_1 seront nuls, et elle se réduira à la forme binôme

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial\rho_1'^2} + a_1\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} = 0.$$

Le raisonnement précédent montre d'ailleurs que cette forme n'est pas typique et peut être obtenue d'une infinité de manières.

exprimées en fonction de deux variables α et β. Si l'on a obtenu, par un procédé quelconque, une équation de la forme (16) à laquelle satisfont ces quatre coordonnées, on peut la ramener, par le procédé que nous avons indiqué, à la forme (20) et l'on reconnaît alors immédiatement que les courbes (ρ), (ρ_1) tracent sur la surface un système conjugué. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Quand on a formé, d'une manière quelconque, une équation de la forme (16) *à laquelle satisfont, soit les quatre coordonnées ponctuelles, soit les quatre coordonnées tangentielles, les caractéristiques de cette équation tracent sur la surface un système conjugué.*

Une équation de la forme (16), contenant cinq coefficients, n'est pas déterminée par la condition d'admettre comme solutions particulières les quatre coordonnées ponctuelles, par exemple. Mais, si l'on ajoute à cette condition celle d'admettre une cinquième solution φ, tous ses coefficients seront parfaitement déterminés, ainsi que le système conjugué formé par ses caractéristiques. En ce sens, on peut dire que, à chaque fonction φ, correspond un système conjugué particulier.

Ainsi, supposons que l'on prenne des coordonnées cartésiennes x, y, z. L'équation (16), devant alors admettre la solution $\theta = t = 1$, ne contiendra pas le terme en θ, et tous ses coefficients seront complètement déterminés par la condition qu'elle admette, en même temps que x, y, z, une nouvelle solution particulière φ que nous supposerons exprimée en fonction de x, y, z, par exemple. Ramenons l'équation à la forme (20) en prenant comme nouvelles variables les paramètres ρ, ρ_1 du système conjugué formé par ses caractéristiques; et soit alors

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} = A \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}$$

sa forme nouvelle. On aura

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \, \partial \rho_1} = A \frac{\partial x}{\partial \rho} + B \frac{\partial x}{\partial \rho_1},$$

et les équations analogues en y et z. Si l'on exprime maintenant que φ en est une solution, et si l'on élimine $\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\,\partial\rho_1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial\rho\,\partial\rho_1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\rho_1}$ au moyen des équations précédentes, on trouvera

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+\frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\right)+\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho_1}=0.$$

C'est une relation à laquelle devront satisfaire, en chaque point de la surface, les tangentes aux deux familles conjuguées.

108. Si l'on prend, par exemple, la valeur suivante de φ

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2,$$

on aura

$$\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\frac{\partial y}{\partial\rho}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho_1}=0;$$

le système conjugué est orthogonal, c'est-à-dire qu'il est formé des deux systèmes de lignes de courbure, ce qui nous conduit au théorème suivant :

L'équation de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+E\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0,$$

dont les coefficients sont déterminés par la condition qu'elle admette comme solutions particulières

$$x,\quad y,\quad z,\quad x^2+y^2+z^2,$$

x, y, z désignant les coordonnées cartésiennes orthogonales d'un point de la surface exprimées en fonction de deux variables quelconques α et β, admet pour caractéristiques les deux familles de lignes de courbure de la surface.

L'application suivante, qui est très simple, fournit une vérification de cette proposition. Prenons comme variables indépendantes deux des coordonnées x et y. L'équation

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+D\frac{\partial\theta}{\partial x}+E\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,$$

devant admettre les solutions particulières x et y, on aura d'abord

$$D = E = 0;$$

si l'on exprime ensuite qu'elle admet également les deux solutions

$$\theta = z, \qquad \theta = x^2 + y^2 + z^2,$$

on obtiendra les deux relations

$$Ar + Bs + Ct = 0, \qquad A(1 + p^2) + Bpq + C(1 + q^2) = 0,$$

où p, q, r, s, t désignent les dérivées de z, et qui déterminent les rapports de A, B, C. L'équation cherchée est donc

$$\begin{aligned} &[s(1 + q^2) - tpq]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ &\quad - [r(1 + q^2) - t(1 + p^2)]\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + [rpq - s(1 + p^2)]\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0, \end{aligned}$$

et l'équation différentielle de ses caractéristiques fournit l'équation bien connue des lignes de courbure.

109. La théorie des lignes asymptotiques d'une surface se rattache par les liens les plus étroits à celle des systèmes conjugués. Si l'on groupe ces lignes en deux familles distinctes, comme on le fait pour les lignes de courbure, on peut dire que chacune des deux familles ainsi obtenues est conjuguée à elle-même. Par conséquent les lignes asymptotiques se conservent lorsqu'on soumet la surface, soit à une transformation homographique, soit à une transformation par polaires réciproques. Le calcul suivant met d'ailleurs ces résultats en évidence.

Conservons toutes les notations du n° 96. Soient toujours u, v, w, p les coordonnées du plan tangent, x, y, z, t celles du point de contact. On aura, nous l'avons vu, les égalités

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} &ux + vy + wz + pt = 0, \\ &u\,dx + v\,dy + w\,dz + p\,dt = 0, \\ &x\,du + y\,dv + z\,dw + t\,dp = 0. \end{aligned} \right.$$

qui se rapportent à un déplacement quelconque effectué sur la surface.

Cherchons l'équation différentielle des lignes asymptotiques. Il faudra écrire que le point osculateur de ces lignes coïncide avec le plan tangent, c'est-à-dire que le point dont les coordonnées sont

$$x + dx + \tfrac{1}{2} d^2x, \quad y + dy + \tfrac{1}{2} d^2y, \quad \ldots$$

se trouve dans le plan tangent. On est ainsi conduit, en tenant compte des égalités précédentes, à l'équation

$$(23) \qquad u\, d^2x + v\, d^2y + w\, d^2z + p\, d^2t = 0.$$

Les identités que l'on obtient en différentiant les deux dernières équations (22) nous permettent de remplacer l'équation précédente par une des deux suivantes

$$(24) \qquad \begin{cases} du\, dx + dv\, dy + dw\, dz + dp\, dt = 0, \\ x\, d^2u + y\, d^2v + z\, d^2w + t\, d^2p = 0, \end{cases}$$

qui lui sont équivalentes.

La première de ces deux formules donne immédiatement l'équation différentielle des lignes asymptotiques quand la surface est définie par son équation, soit en coordonnées ponctuelles, soit en coordonnées tangentielles; mais les formules précédentes (23) et (24) permettent aussi d'écrire cette équation différentielle si l'on suppose que les coordonnées soient exprimées en fonction de deux variables α et β. Par exemple, si l'on élimine u, v, w, p entre la première équation (22), les deux équations (13) du n° 96 et l'équation (23), on sera conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} & d^2x \\ y & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} & d^2y \\ z & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial z}{\partial \beta} & d^2z \\ t & \dfrac{\partial t}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial t}{\partial \beta} & d^2t \end{vmatrix} = 0,$$

qui constitue l'équation différentielle cherchée. Si l'on développe

et si l'on ordonne par rapport à $d\alpha$, $d\beta$, on trouvera

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &\begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix} d\alpha^2 \\ &+ 2 \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} \end{vmatrix} d\alpha\, d\beta + \begin{vmatrix} x & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \\ y & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} \\ z & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \\ t & \frac{\partial t}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2} \end{vmatrix} d\beta^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation en coordonnées tangentielles est toute semblable et s'obtiendra en remplaçant dans la précédente x, y, z, t par u, v, w, p.

Nous pourrions déduire de l'équation précédente la proposition déjà démontrée (n° 98) relativement aux systèmes conjugués; car la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de courbes (α), (β) soient conjuguées, c'est-à-dire pour que les tangentes aux courbes coordonnées qui passent en chaque point de la surface divisent harmoniquement l'angle formé en ce point par les tangentes asymptotiques, est évidemment que le coefficient de $d\alpha\, d\beta$ soit nul dans l'équation différentielle (25). Nous retrouvons ainsi la condition déjà donnée (n° 97).

110. Réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra sur une surface un système conjugué, on pourra écrire l'équation des lignes asymptotiques sous une forme qui ne contiendra plus le rectangle $d\alpha\, d\beta$.

Ici se présente une nouvelle occasion d'appliquer la proposition de M. Koenigs, car si l'on suppose que la droite D qui figure dans l'énoncé de cette proposition s'éloigne à l'infini parallèlement à un plan fixe, on reconnaîtra que les sections planes, parallèles à

ce plan fixe, ont pour conjuguées les courbes de contact des cylindres circonscrits à la surface dont les génératrices rectilignes sont parallèles aux diverses droites de ce plan. Si l'on rapporte les points de la surface à ce système conjugué, l'équation des lignes asymptotiques ne devra contenir que les carrés des différentielles.

Prenons en effet un système de coordonnées cartésiennes x, y, z et soient p, q les dérivées de z considérée comme fonction de x et de y. En supposant que le plan fixe ait été choisi pour plan des yz, les variables qu'il faudra adopter seront les suivantes :

$$x = \alpha, \qquad q = \beta. \tag{26}$$

De l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on déduit

$$d(z - qy) = p\,dx - y\,dq = p\,d\alpha - y\,d\beta.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$z - qy = z', \tag{27}$$

et si l'on exprime z' en fonction de α et de β, l'équation précédente nous donnera évidemment

$$p = \frac{\partial z'}{\partial \alpha}, \qquad y = -\frac{\partial z'}{\partial \beta},$$

ou encore

$$p = p', \qquad y = -q', \tag{28}$$

p' et q' désignant les dérivées de z' par rapport à α et à β.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$dp\,dx + dq\,dy = 0$$

deviendra donc, avec les variables α et β,

$$dp'\,d\alpha - dq'\,d\beta = 0, \tag{29}$$

et, si l'on remplace p', q' par leurs expressions $r'\,d\alpha + s'\,d\beta$, $s'\,d\alpha + t'\,d\beta$, en fonction des dérivées secondes r', s', t' de z', elle prendra la forme

$$r'\,d\alpha^2 - t'\,d\beta^2 = 0, \tag{30}$$

qui, comme nous l'avions prévu, ne contient plus le terme en $d\alpha\, d\beta$.

111. La forme si simple de cette équation permet d'obtenir un grand nombre de surfaces dont on pourra déterminer en termes finis les lignes asymptotiques.

En effet, considérons à la fois une équation différentielle

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha^2} = \varphi(\alpha, \beta) \tag{31}$$

et l'équation aux dérivées partielles

$$r' - t'\varphi(\alpha, \beta) = 0. \tag{32}$$

Si l'on sait trouver une fonction z' satisfaisant à cette dernière équation, on en déduira une surface en remontant à x, y, z par les formules

$$x = \alpha, \qquad y = -q', \qquad z = qy + z' = z' - \beta q'.$$

Or les lignes asymptotiques de cette surface seraient déterminées par l'équation

$$r'\,d\alpha^2 - t'\,d\beta^2 = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{r'}{t'}$ par sa valeur déduite de l'équation (32), on retrouvera l'équation (31). Toutes les fois que l'on saura intégrer cette équation différentielle en même temps que l'équation aux dérivées partielles (32), on aura donc des surfaces dont on connaîtra les lignes asymptotiques.

Supposons, par exemple, que l'on prenne pour la fonction φ une constante k^2. Les équations finies des deux systèmes de lignes asymptotiques seront

$$\beta + k\alpha = \text{const.}, \qquad \beta - k\alpha = \text{const.}$$

L'équation (32) aura pour intégrale générale

$$z' = F(\beta + k\alpha) + F_1(\beta - k\alpha),$$

et les coordonnées x, y, z d'un point de la surface seront données en fonction de α et de β par les formules

$$\begin{aligned} x &= \alpha, \\ y &= -F'(\beta + k\alpha) - F'_1(\beta - k\alpha), \\ z &= F - \beta F' + F_1 - \beta F'_1. \end{aligned}$$

112. Voici encore une autre application de la formule (25).

Considérons les surfaces pour lesquelles les coordonnées cartésiennes x, y, z sont définies en fonction de deux variables ρ, ρ_1 par les expressions suivantes :

$$(33)\qquad \begin{cases} x = A(\rho - a)^m(\rho_1 - a)^n, \\ y = B(\rho - b)^m(\rho_1 - b)^n, \\ z = C(\rho - c)^m(\rho_1 - c)^n. \end{cases}$$

Je dis d'abord que les courbes (ρ), (ρ_1) tracent sur ces surfaces un système conjugué. On vérifie en effet que les trois coordonnées satisfont à l'équation

$$(34)\qquad (\rho - \rho_1)\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + n\frac{\partial\theta}{\partial\rho} - m\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0.$$

Il suit de là que, si l'on cherche l'équation des lignes asymptotiques en appliquant la formule (25), cette équation ne contiendra pas de terme en $d\rho\, d\rho_1$. En faisant le calcul, on obtient en effet l'équation différentielle

$$(35)\qquad \frac{m(m-1)\,d\rho^2}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)} = \frac{n(n-1)\,d\rho_1^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)},$$

qui s'intègre dans tous les cas par des quadratures, mais dont l'intégrale est algébrique toutes les fois que le quotient $\frac{m(m-1)}{n(n-1)}$ est le carré d'un nombre commensurable.

Dans le cas particulier où m est égal à n, on peut éliminer ρ, ρ_1 et trouver l'équation de la surface, qui est

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{m}}(b-c) + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{m}}(c-a) + \left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{1}{m}}(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c).$$

On reconnaît les surfaces tétraédrales, dont Lamé a commencé l'étude dans son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie*, publié en 1818, et qui, depuis, ont été l'objet des travaux de nombreux géomètres, parmi lesquels il faut citer plus particulièrement M. de la Gournerie. L'équation (35) se réduit alors à celle qui a été intégrée par Euler et qui donne l'addition des fonctions elliptiques. Parmi les formes si nombreuses que l'on peut donner à son intégrale, nous

choisirons la suivante

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{(\rho-a)(\rho_1-a)}{(a-b)(a-c)}} + \sqrt{\beta}\sqrt{\frac{(\rho-b)(\rho_1-b)}{(b-a)(b-c)}} + \sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{(\rho-c)(\rho_1-c)}{(c-a)(c-b)}} = 0,$$

où α, β, γ désignent trois constantes arbitraires dont la somme est nulle.

En changeant légèrement les notations, cela donne le résultat suivant.

Les lignes asymptotiques de la surface tétraédrale

$$\left(\frac{x}{A}\right)^m + \left(\frac{y}{B}\right)^m + \left(\frac{z}{C}\right)^m = 1$$

sont déterminées par l'équation

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{m}{2}} + \sqrt{\beta}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{m}{2}} + \sqrt{\gamma}\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{m}{2}} = 0,$$

où α, β, γ sont trois constantes arbitraires dont la somme est nulle. Leurs projections sur un des plans coordonnés, le plan des yz par exemple, ont pour équation (¹)

$$\sqrt{-\alpha} = \sqrt{\beta}\left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{m}{2}} - \sqrt{\gamma}\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

113. Les formules (33) déterminent un grand nombre de surfaces différentes; elles conviennent en particulier à la surface de Steiner pour $m = n = 2$, à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde pour $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{2}$, ... Nous remarquerons qu'elles conservent la même forme, lorsqu'on substitue les coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles. Soit, en effet,

$$uX + vY + wZ - 1 = 0$$

(¹) Les lignes asymptotiques des surfaces tétraédrales ont été déterminées en premier lieu par M. Lie [*voir* l'article *Ueber die Reciprocitäts-Verhältnisse des Reye'schen Complexes* (*Göttingen Nachrichten*, pp. 53-66; 1870)]. La méthode indiquée ici a été développée par l'auteur dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, 1ʳᵉ série, p. 355; 1870.

l'équation du plan tangent; u, v, w seront déterminés par les trois équations

$$\begin{aligned} ux + vy + wz &= 1, \\ u\frac{\partial x}{\partial \rho} + v\frac{\partial y}{\partial \rho} + w\frac{\partial z}{\partial \rho} &= 0, \\ u\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + v\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + w\frac{\partial z}{\partial \rho_1} &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\rho - a)^{1-m}(\rho_1 - a)^{1-n}}{A(a-b)(a-c)}, \\ v &= \frac{(\rho - b)^{1-m}(\rho_1 - b)^{1-n}}{B(b-a)(b-c)}, \\ w &= \frac{(\rho - c)^{1-m}(\rho_1 - c)^{1-n}}{C(c-a)(c-b)}. \end{aligned}$$

Si, en particulier, on a

$$m + n = 1,$$

on obtient des surfaces qui coïncident avec leur polaire réciproque par rapport à la surface du second degré

$$\frac{x^2}{A^2(a-b)(a-c)} + \frac{y^2}{B^2(b-a)(b-c)} + \frac{z^2}{C^2(c-a)(c-b)} = 1.$$

Dans ce cas encore, l'équation différentielle des lignes asymptotiques se réduira à celle d'Euler (1).

114. En terminant ce sujet, nous indiquerons, entre la théorie des lignes asymptotiques et celle des équations linéaires aux dérivées partielles, des rapprochements analogues à ceux qui font l'objet des nos **84** et **107**. Une famille de lignes asymptotiques pouvant être considérée comme un système qui est à lui-même son propre conjugué, le théorème du no **107** nous donne immédiatement le suivant :

Si les coordonnées x, y, z, t ou u, v, w, p, considérées comme des fonctions de α et de β, satisfont à une équation linéaire de la forme (16) *pour laquelle les caractéristiques sont confon-*

(1) On pourra consulter une *Note sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes* (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 1039; 1883) où l'on trouvera une généralisation de la méthode qui est employée dans les derniers numéros de ce Chapitre.

dues, les caractéristiques de cette équation tracent sur la surface une des deux familles de lignes asymptotiques. En particulier, si elles satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + D\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + E\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + F\theta = 0, \tag{36}$$

les lignes $\alpha =$ const. *sont asymptotiques.*

Cette dernière partie de la proposition se vérifie immédiatement, à l'inspection de l'équation (25), dans laquelle le coefficient de $d\beta^2$ devient nul, en vertu de l'hypothèse.

Toutes les fois que l'on aura une équation linéaire de la forme (36) et que l'on en connaîtra quatre solutions linéairement indépendantes, le théorème précédent permettra d'obtenir une surface sur laquelle on connaîtra une des deux familles de lignes asymptotiques.

CHAPITRE III.

DES SYSTÈMES ORTHOGONAUX ET ISOTHERMES.

Division de la surface en carrés infiniment petits. — Systèmes isothermes et coordonnées symétriques. — Cartes géographiques. — Résolution du problème pour les surfaces de révolution et les surfaces du second degré. — Systèmes isothermes dans le plan.

---

115. Après avoir donné les propriétés les plus simples des systèmes conjugués, nous allons considérer les systèmes orthogonaux et particulièrement les systèmes à la fois orthogonaux et isothermes. Nous recherchons d'abord tous les systèmes de coordonnées orthogonales permettant de diviser la surface en carrés infiniment petits.

Soit

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire; A et C seront des fonctions données de u et de v

$$A = f(u, v), \qquad C = \varphi(u, v).$$

Considérons (*fig.* 6) quatre lignes coordonnées de chaque famille : (A), (A_1), (B), (B_1), correspondantes aux valeurs

$$u_0, \quad u_0 + du_0, \quad u, \quad u + du$$

de u, et (C), (C_1), (D), (D_1), correspondantes aux valeurs

$$v_0, \quad v_0 + dv_0, \quad v, \quad v + dv$$

de v. Elles déterminent évidemment quatre rectangles infiniment petits (1), (2), (3), (4). Cherchons s'il est possible de disposer de du, dv, du_0, dv_0, de telle manière que ces rectangles soient tous des carrés. La considération de chacun d'eux nous donnera les

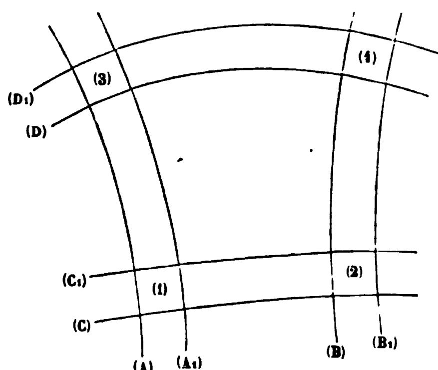
relations

$$f(u_0, v_0)\,du_0 = \varphi(u_0, v_0)\,dv_0,$$
$$\varphi(u_0, v)\,dv = f(u_0, v)\,du_0,$$
$$\varphi(u, v_0)\,dv_0 = f(u, v_0)\,du,$$
$$f(u, v)\,du = \varphi(u, v)\,dv.$$

Ces équations, au nombre de quatre, ne contiennent que trois inconnues, les rapports de du, dv, du_0, dv_0. L'élimination de ces rapports conduira à une condition, que l'on obtient d'ailleurs immédiatement en multipliant membre à membre toutes les équations. On trouve ainsi

$$\frac{f(u_0, v_0)f(u, v)}{\varphi(u_0, v_0)\varphi(u, v)} = \frac{f(u, v_0)f(u_0, v)}{\varphi(u, v_0)\varphi(u_0, v)}.$$

Fig. 6.



Donnons dans cette relation à u_0 et à v_0 des valeurs numériques quelconques. Elle prend la forme

$$\frac{f(u, v)}{\varphi(u, v)} = \frac{\theta(u)}{\theta_1(v)},$$

et, par conséquent, on devra avoir

$$A = f(u, v) = \lambda\,\theta(u),$$
$$C = \varphi(u, v) = \lambda\,\theta_1(v),$$

λ désignant une fonction quelconque de u et de v.

Si l'on substitue ces valeurs de A et de C dans l'élément linéaire,

on obtient la nouvelle expression

$$ds^2 = \lambda^2 [\theta^2(u)\, du^2 + \theta_1^2(v)\, dv^2]$$

ou, plus simplement,

$$(1) \qquad ds^2 = \lambda^2 (du_1^2 + dv_1^2),$$

en posant

$$u_1 = \int \theta(u)\, du, \qquad v_1 = \int \theta_1(v)\, dv.$$

Réciproquement, toutes les fois que l'élément linéaire pourra être ramené à la forme précédente, la surface, nous le savons (n° 65), sera divisible en carrés infiniment petits par les lignes coordonnées.

116. Nous avons déjà rencontré plusieurs surfaces sur lesquelles il existe des systèmes orthogonaux et isothermes: nous allons maintenant démontrer que l'élément linéaire d'une surface quelconque peut, d'une infinité de manières, être ramené à la forme (1). Pour comprendre la méthode suivante, il suffit de remarquer que, si l'on substitue à u_1, v_1 les variables complexes

$$\alpha = u_1 + iv_1, \qquad \beta = u_1 - iv_1,$$

la formule (1) se présente sous la forme

$$(2) \qquad ds^2 = \lambda\, d\alpha\, d\beta.$$

Cela posé, considérons une surface quelconque dont l'élément linéaire soit donné sous la forme la plus générale

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Posons, pour abréger,

$$H^2 = EG - F^2,$$

et excluons le cas, qui d'ailleurs ne peut se présenter pour des surfaces réelles, où $EG - F^2$ serait nul et où l'élément linéaire serait un carré parfait ([1]). On pourra décomposer l'élément li-

([1]) L'élément linéaire n'est un carré parfait que dans le cas où la surface est une développable circonscrite au cercle imaginaire de l'infini. En effet, supposons

néaire en deux facteurs et écrire

$$ds^2 = \left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right)\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right).$$

Si nous égalons à zéro successivement les deux facteurs, nous aurons deux équations différentielles. Soient

$$\varphi(u, v) = \alpha, \qquad \psi(u, v) = \beta$$

les intégrales de ces équations ; elles définiront deux familles de lignes imaginaires tracées sur la surface et dont l'arc sera égal à zéro. On aura, comme on sait,

$$(3)\qquad \begin{cases} d\alpha = \mu\left(\sqrt{E}\,du + \dfrac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right), \\ d\beta = \nu\left(\sqrt{E}\,du + \dfrac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right), \end{cases}$$

---

que l'on ait

$$ds^2 = (m\,du + n\,dv)^2.$$

Soit $\frac{1}{h}$ le facteur qui rend

$$\frac{m\,du + n\,dv}{h}$$

une différentielle exacte.

On pourra poser

$$(1)\qquad ds^2 = h^2 d\beta^2\,;$$

h sera une fonction de β et d'une seconde coordonnée curviligne α permettant de définir, avec β, les différents points de la surface. Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de la surface devront satisfaire aux deux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial \beta} + \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

En différentiant la première par rapport à α et à β, on obtient

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} + \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Si l'on différentie la seconde des formules (2) par rapport à α, on aura, en tenant

μ et ν étant des facteurs convenablement choisis; α, β sont évidemment des fonctions de u et de v indépendantes l'une de l'autre; car leur déterminant fonctionnel

$$-2\mu\nu i\mathrm{H}$$

est différent de zéro. Si on les prend comme nouvelles variables, la multiplication des deux formules précédentes nous donnera, pour l'élément linéaire de la surface, l'expression

$$ds^2 = \frac{1}{\mu\nu}\,d\alpha\,d\beta$$

ou, en changeant les notations,

$$(4) \qquad ds^2 = \lambda^2\,d\alpha\,d\beta.$$

---

compte de la seconde équation (3),

$$(4) \qquad \frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial y}{\partial\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial z}{\partial\beta}\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2} = 0.$$

La comparaison des équations précédentes nous montre que l'on aura deux solutions différentes des équations homogènes en u, v, w

$$u\frac{\partial x}{\partial\alpha} + v\frac{\partial y}{\partial\alpha} + w\frac{\partial z}{\partial\alpha} = 0,$$
$$u\frac{\partial x}{\partial\beta} + v\frac{\partial y}{\partial\beta} + w\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0,$$

si l'on prend, soit

$$u = \frac{\partial x}{\partial\alpha}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial\alpha}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial\alpha},$$

soit

$$u = \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}, \qquad v = \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}, \qquad w = \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}};$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(5) \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}}{f(\beta)} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}}{f_1(\beta)} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}}{f_2(\beta)}.$$

Si l'on désigne par $\dfrac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}$ la valeur commune de ces rapports, on aura

$$\begin{cases} x = f(\beta)\alpha' + \varphi(\beta), \\ y = f_1(\beta)\alpha' + \varphi_1(\beta), \\ z = f_2(\beta)\alpha' + \varphi_2(\beta). \end{cases}$$

Écrivons que ces valeurs de x, y, z satisfont aux équations (2), nous trou-

Nous aurons souvent à employer le système des variables α, β qui ont reçu le nom de *coordonnées symétriques*. Dans le cas d'un élément linéaire réel, on peut évidemment supposer que les variables α et β soient imaginaires conjuguées, ainsi que les facteurs μ et ν. Supposons, par exemple, que l'on ait obtenu des fonctions α et μ vérifiant la première équation (3); si l'on change i en $-i$, on voit que les imaginaires conjuguées de α et de μ donnent une solution de la seconde équation.

117. Supposons que l'élément linéaire ait été mis de deux manières différentes sous la forme (4) et que l'on ait à la fois

$$ds^2 = \lambda^2\, d\alpha\, d\beta = \lambda'^2\, d\alpha'\, d\beta'. \tag{5}$$

Nous allons montrer que cette équation ne peut avoir lieu que si α', β' dépendent respectivement d'une seule des variables α, β.

En effet, si l'on suppose α', β' exprimés en fonction des variables

---

verons

$$\left\{\begin{array}{l} f^2(\beta)+f_1^2(\beta)+f_2^2(\beta)=0, \\ f(\beta)\varphi'(\beta)+f_1(\beta)\varphi_1'(\beta)+f_2(\beta)\varphi_2'(\beta)=0. \end{array}\right. \tag{7}$$

Si l'on ajoute les équations (6), après les avoir multipliées par $f(\beta)$, $f_1(\beta)$, $f_2(\beta)$ respectivement, on aura

$$f(\beta)x+f_1(\beta)y+f_2(\beta)z=f\varphi+f_1\varphi_1+f_2\varphi_2. \tag{8}$$

Si on les multiplie par f', f_1', f_2', on trouvera de même, en les ajoutant,

$$xf'(\beta)+yf_1'(\beta)+zf_2'(\beta)=\varphi f'+\varphi_1 f_1'+\varphi_2 f_2',$$

ou, en tenant compte de la seconde équation (7),

$$xf'(\beta)+yf_1'(\beta)+zf_2'(\beta)=\frac{\partial}{\partial\beta}(\varphi f+\varphi_1 f_1+\varphi_2 f_2). \tag{9}$$

L'équation (9) s'obtient en prenant la dérivée de l'équation (8) par rapport à β. La surface est donc l'enveloppe du plan défini par l'équation (8). Or, d'après la première des formules (7), ce plan est tangent au cercle de l'infini.

Les seules surfaces pour lesquelles l'élément linéaire soit un carré parfait sont donc les développables circonscrites au cercle de l'infini. Les arêtes de rebroussement de ces développables sont des courbes dont toutes les tangentes rencontrent le cercle à l'infini et qui satisfont à l'équation

$$dx^2+dy^2+dz^2=0.$$

indépendantes α, β et si l'on remplace les différentielles $d\alpha'$, $d\beta'$ par leurs valeurs

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}d\beta, \quad \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial\beta'}{\partial\beta}d\beta,$$

l'identité (5) nous donnera les trois équations

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

La première ne peut avoir lieu que si α' ou β' dépendent de la seule variable α, et, en tenant compte de la seconde, on a les deux solutions

$$\alpha' = \mathcal{F}(\alpha), \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\beta)$$

ou

$$\alpha' = \mathcal{F}(\beta), \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\alpha).$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Lorsqu'on aura mis l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2 d\alpha\, d\beta,$$

on ne pourra conserver cette forme de l'élément linéaire que si l'on substitue aux variables α, β les variables α', β' déterminées par l'un ou l'autre des systèmes

$$1^\circ \ldots\ldots\ldots \quad \alpha' = \mathcal{F}(\alpha) \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\beta)$$
$$2^\circ \ldots\ldots\ldots \quad \alpha' = \mathcal{F}(\beta) \qquad \beta' = \mathcal{F}_1(\alpha)$$

118. Des coordonnées symétriques on passe immédiatement aux systèmes isothermes. Reprenons, en effet, la formule (4) et remplaçons α, β par les expressions suivantes

$$\alpha = u + iv, \qquad \beta = u - iv;$$

elle donnera

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2). \tag{6}$$

C'est la forme de l'élément linéaire qui caractérise les systèmes isothermes. En appliquant à ces systèmes les propositions déjà démontrées pour les coordonnées symétriques, on peut énoncer les théorèmes suivants :

1° *Sur toute surface il existe une infinité de systèmes ortho-*

gonaux et isothermes. On les obtient par l'intégration complète de l'équation

$$ds^2 = 0.$$

2° *Lorsqu'on a obtenu un système isotherme* (u, v), *on passe à tout autre système isotherme* (u', v') *par l'emploi de l'un ou l'autre des systèmes de formules*

1°

$$(7) \qquad \begin{cases} u' + iv' = f\,(u + iv), \\ u' - iv' = f_1(u - iv); \end{cases}$$

2°

$$(8) \qquad \begin{cases} u' + iv' = f(u - iv), \\ u' - iv' = f_1(u + iv), \end{cases}$$

et par conséquent la connaissance d'un seul système orthogonal et isotherme tracé sur la surface entraîne celle de tous les autres systèmes semblables tracés sur la même surface.

119. La théorie des coordonnées symétriques et des systèmes isothermes, qu'on peut faire remonter au premier Mémoire ([1]) de Gauss, publié en 1825, doit son origine à l'étude d'une belle question de Géométrie pratique, celle du tracé géographique d'une surface sur une autre, et plus particulièrement sur le plan. La théorie des cartes géographiques avait été l'objet d'importants travaux de Lambert, d'Euler, de Lagrange. Comme il est impossible (n° **72**) de représenter une portion de la sphère, ou de toute autre surface non développable, sur le plan, de manière à conserver les longueurs des arcs, on s'était surtout attaché aux modes de représentation qui conservent les angles, tels que la projection stéréographique, la projection de Mercator. Ces modes de représentation ont la propriété fondamentale d'établir la similitude des éléments infiniment petits qui se correspondent sur les deux surfaces. Si l'on considère en effet deux triangles correspondants infiniment petits, on pourra les assimiler

---

([1]) GAUSS, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 193).

à deux triangles rectilignes et, comme ils seront équiangles, leurs côtés homologues seront proportionnels. Réciproquement, si deux surfaces se correspondent point par point, de telle manière que leurs éléments linéaires soient liés par la relation

$$ds^2 = \lambda^2 ds'^2,$$

et si l'on considère sur une d'elles une région assez petite pour que l'on puisse y faire abstraction de la variation de λ, les lignes correspondantes tracées sur les deux surfaces seront dans un rapport constant; par conséquent deux triangles correspondants infiniment petits seront semblables, et les angles se conserveront quand on passera d'une surface à l'autre.

On peut établir cette proposition d'une manière plus rigoureuse en cherchant l'angle de deux courbes tracées sur une surface quelconque. Supposons que l'on se déplace à partir d'un point de la surface dans deux directions différentes et désignons par les caractéristiques d, δ les différentielles relatives à ces deux déplacements. Soit

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire. Les formules

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad \delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v,$$

$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$

nous donneront

$$(9) \quad dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = \mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v$$

et, par conséquent, l'angle V des deux directions sera déterminé par la formule

$$(10) \quad \cos \mathrm{V} = \frac{\mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v}{\sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}\sqrt{\mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\,\delta v^2}}.$$

On voit qu'il dépend seulement des rapports de E, F, G et demeure le même quand l'élément linéaire tout entier est multiplié par une fonction quelconque de u et de v.

120. Comme l'élément linéaire du plan est réductible à la forme

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

le problème du tracé géographique d'une surface quelconque sur le plan peut être formulé comme il suit :

Mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = \lambda^2(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

c'est-à-dire déterminer sur la surface un système orthogonal et isotherme.

Et il résulte des développements précédents que, lorsqu'on connaîtra une solution de ce problème, on pourra obtenir toutes les autres sans aucune intégration.

Nous avons vu que, sur toute surface de révolution, les méridiens et les parallèles forment un système isotherme. On saura donc résoudre le problème pour toutes les surfaces de révolution.

Considérons, par exemple, la sphère pour laquelle on a

$$(11) \qquad ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2 = \sin^2 u \left(\frac{du^2}{\sin^2 u} + dv^2 \right).$$

Posons

$$\int \frac{du}{\sin u} = kx = \log \operatorname{tang} \frac{u}{2}, \qquad v = ky,$$

l'élément linéaire deviendra

$$(12) \qquad ds^2 = \frac{4k^2 e^{2kx}}{(1 + e^{2kx})^2}(dx^2 + dy^2).$$

Si l'on fait correspondre au point (u, v) de la sphère le point du plan dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, on obtiendra un mode de tracé dans lequel les méridiens faisant des angles égaux seront représentés par des droites parallèles équidistantes, et les parallèles par des droites perpendiculaires aux précédentes. C'est la projection de Mercator. Elle offre l'avantage, autrefois très apprécié pour les cartes marines, de faire correspondre aux loxodromies (courbes qui coupent tous les méridiens sous un angle constant) des droites de la carte.

Si, au contraire, on posait

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{d\rho}{\rho}, \qquad v = \omega, \qquad \rho = k \operatorname{tang} \frac{u}{2},$$

l'élément linéaire deviendrait

$$ds^2 = \frac{4k^2}{(\rho^2+k^2)^2}(d\rho^2+\rho^2 d\omega^2).$$

En faisant correspondre au point (u, v) le point du plan dont les coordonnées polaires sont ρ et ω, on aura un tracé géographique dans lequel, aux méridiens correspondront des droites concourantes, et aux parallèles les cercles concentriques du plan coupant toutes ces droites à angle droit. C'est le tracé que l'on obtiendrait en faisant la projection stéréographique de la sphère d'un point de vue placé au pôle.

121. Considérons maintenant une surface du second degré représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1. \tag{13}$$

On peut la regarder comme une surface tétraèdrale (n° **112**) et prendre, pour les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points, les expressions suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a(a-\rho)(a-\rho_1)}{(a-b)(a-c)}},\\ y &= \sqrt{\frac{b(b-\rho)(b-\rho_1)}{(b-a)(b-c)}},\\ z &= \sqrt{\frac{c(c-\rho)(c-\rho_1)}{(c-a)(c-b)}}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Nous savons déjà que les courbes (ρ), (ρ_1) forment un système conjugué. Ce système est aussi orthogonal, car les formules précédentes permettent de vérifier l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}+\frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho_1}+\frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_1}=0.$$

Le système (ρ, ρ_1), étant à la fois orthogonal et conjugué, est donc formé des lignes de courbure de la surface. Les formules (14) nous permettent aussi de calculer l'élément linéaire dont on obtient l'expression suivante :

$$ds^2 = \frac{\rho-\rho_1}{4}\left[\frac{\rho\, d\rho^2}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)} - \frac{\rho_1\, d\rho_1^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}\right]. \tag{15}$$

Posons

$$\frac{\sqrt{\rho}\, d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)}} = d\alpha, \qquad \frac{\sqrt{-\rho_1}\, d\rho_1}{\sqrt{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}} = d\beta,$$

et la formule (15) deviendra

$$(16) \qquad ds^2 = \frac{\rho - \rho_1}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

On a donc un système orthogonal et isotherme; son emploi permettra de faire la carte de toute région tracée sur la surface du second degré (¹).

Il résulte du calcul précédent que les surfaces du second degré sont divisibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. Cette propriété appartient aussi, nous l'avons déjà vu, aux surfaces de révolution.

Remarquons encore une propriété essentielle de l'élément linéaire des surfaces du second degré. Dans la formule (16), ρ est une fonction de α, ρ_1 est une fonction de β. L'élément linéaire appartient donc au type suivant

$$(17) \qquad ds^2 = [f(\alpha) - F(\beta)](d\alpha^2 + d\beta^2),$$

qui se présentera, sous sa forme la plus générale, dans la théorie des lignes géodésiques.

122. La théorie des surfaces homofocales du second degré conduit à un moyen plus élégant que le précédent d'effectuer le tracé géographique d'une surface du second degré.

Soit

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0 \qquad (a > b > c > 0)$$

l'équation d'un système de surfaces homofocales. Il passera trois surfaces du système par un point quelconque de l'espace; l'une sera un ellipsoïde correspondant à une valeur ρ_2 de λ inférieure à c, l'autre un hyperboloïde à une nappe correspondant à une va-

---

(¹) On pourra lire, au sujet de cette représentation, le Mémoire de Jacobi, *Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben* (*Journal de Crelle*, t. LIX, p. 74; 1861).

leur ρ_1 de λ comprise entre b et c, et la troisième un hyperboloïde à deux nappes correspondant à une valeur ρ de λ comprise entre a et b. Par conséquent, ρ, ρ_1, ρ_2 constituent un système de coordonnées curvilignes, les *coordonnées elliptiques* de Lamé, propre à définir tout point de l'espace. On sait que ce système est orthogonal; l'expression de l'élément linéaire est la suivante :

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{4}\bigg[& \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}\,d\rho^2 \\ & + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}\,d\rho_2^2\bigg], \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$f(\rho) = (a-\rho)(b-\rho)(c-\rho).$$

En y faisant $\rho_2 = 0$, on retrouverait la formule (15).

Le plan $z = 0$ correspondrait à l'hypothèse $\rho_2 = c$.

D'après cela, considérons l'un quelconque des ellipsoïdes du système orthogonal et faisons correspondre à un point quelconque (ρ, ρ_1) de cet ellipsoïde le point du plan des xy qui a pour coordonnées elliptiques ρ', ρ'_1 les quantités définies par les deux équations suivantes :

$$\int_b^{\rho'} \frac{d\rho'}{\sqrt{(a-\rho')(\rho'-b)}} = \int_b^{\rho} \frac{\sqrt{\rho-\rho_2}\,d\rho}{\sqrt{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)}},$$

$$\int_c^{\rho'_1} \frac{d\rho'_1}{\sqrt{(a-\rho'_1)(b-\rho'_1)}} = \int_c^{\rho_1} \frac{\sqrt{\rho_1-\rho_2}\,d\rho}{\sqrt{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(\rho_1-c)}}.$$

Il résulte de la formule (18) que les éléments linéaires des deux surfaces sont proportionnels; ds, ds' désignant les arcs correspondants sur l'ellipsoïde et sur le plan, on aura

$$\frac{ds^2}{ds'^2} = \frac{\rho-\rho_1}{\rho'-\rho'_1}.$$

La correspondance établie donne donc un nouveau tracé géographique de l'ellipsoïde sur le plan, tracé que l'on peut caractériser en remarquant que, si l'ellipsoïde s'aplatit en demeurant constamment homofocal à lui-même, la région représentée vient, à la limite, se confondre avec la carte elle-même.

123. Revenons aux propriétés générales des systèmes isothermes. Si l'on connaît sur une surface quelconque un seul de ces systèmes, on pourra tracer sur cette surface non seulement les autres systèmes isothermes, mais encore une infinité de systèmes orthogonaux. En effet, la connaissance d'un seul système isotherme permet de faire la carte de la surface sur le plan avec conservation des angles et similitude des éléments infiniment petits. Par conséquent, à tout système orthogonal tracé dans le plan, correspondra sur la surface un système orthogonal. Si, de plus, ce système est isotherme et divise le plan en carrés infiniment petits, cette propriété appartiendra au système correspondant de la surface qui sera, par conséquent, isotherme.

Il résulte de là que nous pouvons nous borner à étudier sur une surface plane les questions relatives à la substitution d'un système isotherme à un autre. Désignons par X, Y les coordonnées rectangulaires d'un point du plan et posons

$$Z = X + iY, \qquad Z' = X - iY.$$

L'élément linéaire du plan aura pour expression

$$dS^2 = dZ\,dZ', \tag{19}$$

et, si l'on désigne de même par z, z' les variables complexes

$$z = x + iy, \qquad z' = x - iy,$$

les formules qui permettent de passer au système isotherme le plus général seront

$$Z = f(z), \qquad Z' = f_1(z'), \tag{20}$$

ou

$$Z = f(z'), \qquad Z' = f_1(z); \tag{21}$$

si l'on veut que les nouvelles variables x, y soient réelles en même temps que les anciennes, il faudra évidemment que les fonctions f, f_1 soient, dans les deux cas, imaginaires conjuguées. Pour étudier géométriquement les formules précédentes, nous les considérerons comme définissant un mode de transformation qui fera correspondre à un point $m(x, y)$ un autre point $M(X, Y)$ du même plan.

Nous savons déjà que les deux modes de transformation définis par les formules (20) ou (21) conservent les angles et assurent la similitude des éléments infiniment petits correspondants. Mais il y a ici une distinction essentielle à faire entre les deux systèmes de formules.

Supposons que le point m décrive une certaine courbe; soit ds la différentielle de l'arc de cette courbe et ω l'angle de sa tangente avec l'axe des x. Les formules

$$dx = ds \cos\omega, \qquad dy = ds \sin\omega$$

nous donnent

$$dz = ds\, e^{i\omega}, \qquad dz' = ds\, e^{-i\omega}. \tag{22}$$

Désignons de même par dS et Ω, les quantités analogues relatives à la courbe décrite par le point M(X, Y). On aura également

$$dZ = dS\, e^{i\Omega}, \qquad dZ' = dS\, e^{-i\Omega}. \tag{23}$$

Reportons-nous maintenant aux formules du premier système (20). Elles donnent

$$dZ = f'(z)\, dz, \qquad dZ' = f_1'(z')\, dz';$$

d'où l'on déduit, en multipliant,

$$dS^2 = f'(z) f_1'(z')\, ds^2, \tag{24}$$

et en divisant

$$e^{2i\Omega} = \frac{f'(z)}{f_1'(z')}\, e^{2i\omega}. \tag{25}$$

Donc, si l'on considère deux points correspondants m, M des deux figures, les tangentes en ces points à deux courbes correspondantes quelconques font entre elles un angle constant; par suite, à deux courbes de la première figure se croisant en m correspondront deux courbes de la seconde se croisant en M et y faisant un angle, non seulement égal à celui des deux premières courbes, mais ayant aussi le même sens de rotation. Si le point de la première figure décrit une petite courbe fermée autour du point m, le point correspondant de la seconde figure décrira aussi une courbe fermée autour de M et, de plus, les deux courbes correspondantes seront parcourues dans le même sens.

Il n'en est plus de même si l'on emploie les formules (21); en effet, la transformation qu'elles définissent se ramène à celle qui correspond aux formules (20), précédée ou suivie d'une rotation de 180° autour de l'axe des x; par conséquent, dans cette seconde transformation, les sens de rotation de tous les angles et de tous les parcours seront changés.

124. Contentons-nous d'étudier les formules (20) et considérons seulement les systèmes isothermes réels, c'est-à-dire ceux pour lesquels les fonctions f, f_1 sont imaginaires conjuguées. Nous pourrons dire alors qu'à toute fonction de l'argument complexe z correspond un système isotherme, et nous aurons la proposition suivante, dont on fait un fréquent usage :

Les courbes planes qu'on obtient en égalant à des constantes la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction quelconque $f(z)$ de la variable complexe $z = x + yi$ forment un système orthogonal et isotherme. De plus la formule

$$Z = f(z),$$

qui donne deux équations réelles, définit un mode de transformation avec conservation de la grandeur et du sens de rotation des angles.

Considérons, par exemple, la fonction

$$f(z) = \frac{k^2}{z}; \tag{26}$$

on aura

$$X + Y i = k^2 \frac{x - y i}{x^2 + y^2}$$

ou

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = \frac{-k^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Ce sont les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques où l'on aurait changé y en $-y$. Cette dernière transformation serait définie par la relation

$$Z = \frac{k^2}{z'},$$

qui se rattache aux formules (21); et elle appartient par conséquent, comme l'indique le nom d'*inversion* sous lequel elle est souvent désignée, au groupe général des représentations conformes qui changent le sens de rotation des angles et des parcours.

La transformation définie par la formule

$$Z = \frac{az+b}{cz+d},$$

où a, b, c, d sont des constantes, se rapproche de l'inversion en ce qu'elle fait correspondre un cercle à un cercle; mais elle s'en distingue en ce qu'elle conserve les sens de rotation des angles et des parcours, c'est-à-dire assure la similitude directe des éléments infiniment petits. Cette transformation joue un rôle important dans les recherches relatives à la théorie moderne des fonctions. Pour la distinguer de l'inversion, nous lui donnerons dans le Chapitre suivant le nom de *transformation circulaire*. Elle se ramène d'ailleurs à celle qui est définie par la formule (26) précédée et suivie d'une translation; elle peut aussi être remplacée par des inversions en nombre pair.

Le théorème général que nous avons énoncé peut prendre une forme nouvelle très importante. Supposons qu'on l'applique non plus à $f(z)$, mais à $\log f(z)$. La partie réelle de ce logarithme est le logarithme du module de $f(z)$ et la partie imaginaire l'argument de $f(z)$. On obtient donc cette nouvelle proposition :

Étant donnée une fonction quelconque de la variable complexe z, les courbes d'égal module et d'égal argument de cette fonction forment un système orthogonal et isotherme.

125. Les systèmes orthogonaux et isothermes définis par les deux théorèmes qui précèdent jouent en Physique mathématique un rôle très important. J'indiquerai les applications suivantes.

Soient A_k et M deux points, qui correspondent aux valeurs a_k et z de la variable complexe. On a

$$z - a_k = \rho_k e^{i\theta_k},$$

ρ_k désignant la longueur du segment A_kM et θ_k l'angle que fait ce segment avec l'axe des x. De même, pour un point B_k corres-

pondant à la valeur b_k de la variable complexe, on a

$$z - b_k = \rho'_k e^{i\theta'_k},$$

ρ'_k désignant la longueur de B_kM et θ'_k l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des x.

Si donc on considère la fonction

$$f(z) = \prod_1^n \frac{z - a_k}{z - b_k},$$

les courbes d'égal module auront pour équation

$$\frac{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n}{\rho'_1 \rho'_2 \ldots \rho'_n} = \text{const.}$$

et les courbes d'égal argument

$$\theta_1 - \theta'_1 + \theta_2 - \theta'_2 + \ldots + \theta_n - \theta'_n = \text{const.}$$

De là le théorème suivant, qu'il serait aisé de généraliser :

Si l'on considère deux groupes de n pôles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *et* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *les courbes lieux des points pour lesquels le produit des distances aux premiers pôles* A_i *est proportionnel au produit des distances aux n pôles* B_i *ont pour trajectoires orthogonales les courbes lieux des points d'où l'on voit les n segments* A_iB_i *sous des angles dont la somme est constante.*

Dans le cas où les deux groupes ne contiendront pas le même nombre de pôles, les théorèmes seront encore applicables, pourvu que l'on introduise dans le groupe qui contient le moins de points un pôle multiple situé à l'infini dans une direction déterminée, mais quelconque.

Par exemple, les cassiniennes, lieux des points tels que le produit de leurs distances à deux foyers fixes F, F′ soit constant, admettent pour trajectoires orthogonales les courbes lieux des points M tels que la somme des angles formés par les rayons vecteurs MF, MF′ avec l'axe des x soit constante. Ces dernières courbes sont des hyperboles équilatères passant par les foyers F, F′.

Il suffit, pour le démontrer, de considérer les courbes d'égal mo-

dule et d'égal argument, relatives à la fonction

$$z^2 - c^2.$$

126. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}},$$

où c désigne une constante réelle et positive, et cherchons le système orthogonal et isotherme formé par les courbes sur lesquelles la partie réelle ou la partie imaginaire de cette fonction demeure constante.

Posons

$$(27) \qquad z = c\cos(\alpha + \beta i), \qquad \sqrt{c^2 - z^2} = -c\sin(\alpha + \beta i);$$

l'intégrale aura pour valeur $\alpha + \beta i$ et les deux familles du système isotherme seront définies par les équations

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}$$

Soient F, F' les points du plan ayant pour affixes c et $-c$; M désignant le point dont l'affixe est z, on aura

$$(28) \qquad z - c = \text{FM}\, e^{i\widehat{\text{MF}x}}, \qquad z + c = \text{F'M}\, e^{i\widehat{\text{MF'}x}},$$

et par conséquent

$$\text{FM} = r = \text{mod}(z - c) = c\,\text{mod}[\cos(\alpha + \beta i) - 1] = c[\cos\beta i - \cos\alpha],$$
$$\text{F'M} = r' = \text{mod}(z + c) = c\,\text{mod}[\cos(\alpha + \beta i) + 1] = c[\cos\beta i + \cos\alpha];$$

on déduit de ces équations

$$r + r' = 2c\cos\beta i,$$
$$r' - r = 2c\cos\alpha.$$

On voit que les courbes de la famille (β) sont des ellipses admettant pour foyers F, F'; les courbes de la famille (α) sont les hyperboles homofocales.

D'autre part, si nous employons, avec M. Weierstrass, le symbole $\mathfrak{R}$ pour indiquer la partie réelle d'une fonction, l'équation

des ellipses sera évidemment

$$\mathcal{R}\, i\int \frac{dz}{\sqrt{c^2 - z^2}} = -\beta,$$

et leur équation différentielle

$$\mathcal{R}\frac{i\,dz}{\sqrt{z^2 - c^2}} = 0.$$

L'emploi des formules (22) et (28) nous permet de transformer cette équation et de lui donner la forme

$$\mathcal{R}\frac{ds}{\sqrt{rr'}} e^{i\left(\omega - \frac{\widehat{\text{MF}x} + \widehat{\text{MF}'x}}{2}\right)} = 0,$$

ω désignant l'angle de la tangente à la courbe avec l'axe des x. On a donc

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{\text{MF}x} + \widehat{\text{MF}'x}}{2},$$

ce qui donne la construction bien connue de la tangente à l'ellipse.

Nous terminerons ces applications, que l'on pourrait varier à l'infini, en prenant la fonction

$$f(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{z(z-c)\left(z - \frac{c}{k^2}\right)}},$$

où c et k^2 désignent deux constantes réelles et positives.

Les courbes obtenues en égalant à une constante la partie réelle et la partie imaginaire de cette fonction formeront un système isotherme algébrique que l'on peut définir comme il suit.

Posons :

$$f(z) = \frac{2k}{\sqrt{c}}(\alpha + \beta i),$$

on aura

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{ll} z = c\,\text{sn}^2(\alpha + \beta i), & z' = c\,\text{sn}^2(\alpha - \beta i), \\ z - c = -c\,\text{cn}^2(\alpha + \beta i), & z' - c = -c\,\text{cn}^2(\alpha - \beta i), \\ z - \frac{c}{k^2} = -\frac{c}{k^2}\text{dn}^2(\alpha + \beta i), & z' - \frac{c}{k^2} = -\frac{c}{k^2}\text{dn}^2(\alpha - \beta i), \end{array}\right.$$

et, par conséquent, si l'on désigne par r, r', r'' respectivement les distances du point (x, y) aux trois points en ligne droite

$$z = 0, \qquad z = c, \qquad z = \frac{c}{k^2},$$

on aura

$$(30) \qquad \begin{cases} r = c \operatorname{sn}(\alpha + \beta i) \operatorname{sn}(\alpha - \beta i), \\ r' = c \operatorname{cn}(\alpha + \beta i) \operatorname{cn}(\alpha - \beta i), \\ r'' = \dfrac{c}{k^2} \operatorname{dn}(\alpha + \beta i) \operatorname{dn}(\alpha - \beta i). \end{cases}$$

Écrivons les formules bien connues

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x + a) + \operatorname{dn} a \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x + a) = \operatorname{cn} a,$$
$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x + a) + k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x + a) = \operatorname{dn} a,$$

relatives à l'addition des fonctions elliptiques; si nous y substituons les valeurs suivantes de x et de $x + a$

$$x = \alpha + \beta i, \qquad x + a = \alpha - \beta i,$$

nous trouverons, en tenant compte des formules (30),

$$(31) \qquad \begin{cases} r' + r \operatorname{dn}(2\beta i) = c \operatorname{cn}(2\beta i), \\ r'' + r \operatorname{cn}(2\beta i) = \dfrac{c}{k^2} \operatorname{dn}(2\beta i); \end{cases}$$

Si l'on remplace ensuite x et $x + a$ dans les mêmes formules par les valeurs suivantes

$$-x = \alpha + \beta i, \qquad x + a = \alpha - \beta i,$$

elles donneront les deux relations nouvelles

$$(32) \qquad \begin{cases} r' - r \operatorname{dn}(2\alpha) = c \operatorname{cn}(2\alpha), \\ r'' - r \operatorname{cn}(2\alpha) = \dfrac{c}{k^2} \operatorname{dn}(2\alpha). \end{cases}$$

Les équations (31) et (32) définissent les deux familles isothermes.

Comme on devait s'y attendre, ces deux familles sont représentées par la même équation, mais avec des valeurs différentes de la constante arbitraire. Elles se composent d'ovales de Descartes ayant pour foyers communs les trois points

$$z = 0, \qquad z = c, \qquad z = \frac{c}{k^2}.$$

La double équation obtenue pour chaque famille met en évidence une belle propriété des ovales donnée par M. Chasles dans l'*Aperçu historique*, p. 352.

L'équation différentielle commune aux deux familles d'ovales est évidemment

$$(33) \qquad \frac{dz}{\sqrt{z(z-c)\left(z-\frac{c}{k}\right)}} \pm \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-c)\left(z'-\frac{c}{k^2}\right)}} = 0.$$

Elle conduit à une construction géométrique très simple des tangentes aux deux ovales qui passent en un point M du plan. L'angle de l'une de ces tangentes avec l'axe focal sera la moitié de la somme des angles que font, avec cet axe, les trois rayons vecteurs menés du point M aux trois foyers. Cette somme n'étant définie qu'à un multiple près de π, la construction donnera bien deux tangentes rectangulaires.

127. Une famille de courbes isothermes étant définie par une équation de la forme

$$\lambda = f(z) + f_1(z'),$$

le paramètre λ de cette famille satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(33) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z\, \partial z'} = 0,$$

et, réciproquement, toute fonction λ vérifiant cette équation donne une famille isotherme. Cette remarque permet de traiter la question suivante :

Proposons-nous de déterminer toutes les familles isothermes composées de cercles. L'équation d'un cercle écrite avec les variables z, z' a la forme

$$(34) \qquad zz' + az + bz' + c = 0,$$

et l'on obtiendra la famille de cercles la plus générale en prenant pour a, b, c des fonctions arbitraires d'un paramètre λ. Si l'on exige que cette famille soit isotherme, il faudra que la fonction λ satisfasse à l'équation (33). On est ainsi conduit, par un calcul facile, à l'équation de condition

$$(35) \quad (ab - c)(a''z + b''z' + c'') - (ab' + ba' - c')(a'z + b'z' + c') = 0,$$

où a', b', c'; a'', b'', c'' désignent les dérivées premières et secondes de a, b, c par rapport à λ, et qui doit être une conséquence de l'équation (34). Comme l'équation (35) est du premier degré seulement par rapport à z et à z', elle doit être vérifiée identiquement et l'on a

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'} = \frac{ab'+ba'-c'}{ab-c}.$$

On déduit de là, en négligeant le dernier rapport et en intégrant,

$$a = lc + l_0,$$
$$b = mc + m_0,$$

l, l_0, m, m_0 désignant des constantes. L'équation (34) prendra donc la forme

$$zz' + l_0 z + m_0 z' + c(lz + mz' + 1) = 0$$

et représentera nécessairement une famille de cercles passant par deux points distincts ou confondus. Il est inutile maintenant de continuer les calculs et de déterminer l'expression de c en fonction de λ; car on sait que toutes les familles de cercles passant par deux points distincts ou confondus peuvent se déduire par une inversion d'une famille de droites parallèles, ou de droites concourantes, ou de cercles concentriques, et sont, par conséquent, isothermes. De plus, leurs trajectoires orthogonales, qui sont des cercles, constituent également une famille isotherme, conjuguée de la première. Nous retrouverons cette dernière propriété comme cas particulier d'un théorème général relatif aux cercles géodésiques tracés sur une surface quelconque.

Dans ses Mémoires *Sur la construction des cartes géographiques,* publiés en 1779 (¹), Lagrange a étudié d'une manière détaillée une belle question que l'on peut maintenant résoudre en quelques mots. Considérant la Terre comme une sphère ou comme un sphéroïde de révolution, Lagrange se propose de rechercher tous les tracés géographiques dans lesquels les méridiens et les parallèles sont représentés par des arcs de cercle. Comme les méridiens et les parallèles forment deux familles isothermes con-

(¹) Lagrange, *Œuvres complètes,* t. IV, p. 637.

juguées, les résultats précédents nous conduisent à la proposition suivante, qui donne la solution complète du problème de Lagrange :

Les seuls tracés géographiques pour lesquels les méridiens ou les parallèles soient représentés par des arcs de cercle sont ceux pour lesquels ces deux systèmes de lignes sont figurés sur la carte par des arcs de cercle. On obtient tous ces tracés, dans le cas où la Terre est supposée sphérique, en combinant avec des inversions planes la projection stéréographique ou la projection de Mercator.

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES PLANES.

Énoncé du problème. — Principe analytique sur lequel repose la solution. — Représentation conforme sur la région du plan située au-dessus de l'axe réel d'une aire plane à connexion simple limitée par des lignes droites ou par des arcs de cercle. — Méthode de M. Schwarz. — Application au triangle plan limité par trois arcs de cercle et au triangle sphérique.

---

128. Nous avons reconnu, dans le Chapitre précédent, que l'on peut faire correspondre à toute fonction $Z = f(z)$ de la variable complexe z une méthode de transformation avec similitude directe des éléments infiniment petits et nous avons exposé les propriétés les plus élémentaires des transformations en nombre illimité que l'on peut ainsi obtenir. Nous nous proposons maintenant d'étudier, dans un cas assez étendu, la solution du problème suivant :

Étant données deux aires planes (A), (A_1), *déterminer la fonction* $Z = f(z)$ *qui permet d'effectuer une représentation conforme de l'une des aires sur l'autre, de telle manière qu'à un point, pris dans l'intérieur de l'une quelconque des deux aires, corresponde un seul point pris dans l'intérieur de l'autre, et qu'aux points pris sur le contour de l'une des aires correspondent les points pris sur le contour de l'autre.*

L'examen de cette belle question prise dans son énoncé le plus général se rattache à la solution des problèmes les plus importants de l'Analyse et de la Physique mathématique. Dans l'article 21 de [1] sa *Dissertation inaugurale*, Riemann a montré qu'il est toujours possible de la résoudre. La démonstration de Riemann s'appuie sur un postulatum auquel l'illustre géomètre a donné le

(1) Riemann, *Gesammelte mathematische Werke*, p. 39.

nom de *principe de Dirichlet*. Dans différents travaux, et en particulier dans un article inséré aux *Monatsberichte* [1] de l'Académie de Berlin, M. Schwarz a établi le théorème de Riemann sans employer le principe de Dirichlet; mais la démonstration de l'éminent géomètre n'a pas encore été publiée dans tous ses détails.

On doit aussi à M. Schwarz [2] des recherches très étendues relatives au cas, très important pour la théorie des surfaces minima, où les aires planes dont il s'agit d'obtenir une représentation conforme sont limitées par des arcs de cercle ou des lignes droites. Nous nous proposons de faire connaître ici les principes de la méthode de M. Schwarz.

Si l'on peut représenter deux aires planes (A), (A') sur une troisième aire (A''), on pourra évidemment les rapporter l'une à l'autre avec similitude des éléments infiniment petits. Le problème de Riemann peut donc se ramener au suivant :

Représenter une aire quelconque (A) *sur une aire déterminée* (A''); *par exemple, sur la surface d'un cercle de rayon donné, ou sur la partie du plan qui se trouve au-dessus de l'axe des x.*

Le problème ainsi posé n'est pas encore pleinement déterminé; car, si l'on considère, par exemple, la région (K) du plan qui se trouve au-dessus de l'axe des x, il est aisé de reconnaître qu'elle est applicable sur elle-même d'une infinité de manières, avec similitude des éléments infiniment petits. Désignons, en effet, par z la variable complexe et considérons la transformation définie par la formule

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1}$$

---

[1] H.-A. Schwarz, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeits-Bedingungen* (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, octobre 1870, p. 767).

[2] H.-A. Schwarz, *Ueber einige Abbildungsaufgaben* (*Journal de Crelle*, t. LXX, p. 105-120, 1869).

Ueber diejenigen Fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt (*Journal de Crelle*, t. LXXV, p. 292; 1872).

où a, b, c, d sont des constantes réelles. Soient z_0 et Z_0 les variables imaginaires conjuguées de z et de Z, on aura

$$Z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$$

et, par conséquent,

$$Z - Z_0 = \frac{(ad - bc)(z - z_0)}{(cz + d)(cz_0 + d)};$$

si le déterminant $ad - bc$ est positif, la transformation, qui fait correspondre aux valeurs réelles de z des valeurs réelles de Z, fera aussi correspondre aux valeurs de z, dont la partie imaginaire est positive, des valeurs de Z jouissant de la même propriété; en d'autres termes, elle constituera une représentation conforme de la région (K) sur elle-même. On démontrera aisément, soit par l'Analyse, soit par la Géométrie, qu'il est toujours possible de trouver une transformation de ce genre faisant correspondre trois points donnés de l'axe des x à trois autres points également donnés du même axe, ou faisant correspondre un point donné quelconque dans l'intérieur de (K) à un autre point également donné dans l'intérieur et, de plus, un point de l'axe des x à un autre point pris sur le même axe.

Si l'on admet, comme il est possible de le démontrer, que la transformation définie par la formule (1) est la plus générale de celles qui réalisent la représentation conforme de la région (K) sur elle-même, on voit que le problème de Riemann peut être ramené au suivant qui devient parfaitement déterminé :

Étant donnée une aire (A) *à connexion simple, la représenter d'une manière conforme sur la partie supérieure* (K) *du plan, de telle manière qu'à trois points pris sur le contour de l'aire* (A) *correspondent trois points donnés de l'axe des x.*

129. Désignons par

$$Z = f(z)$$

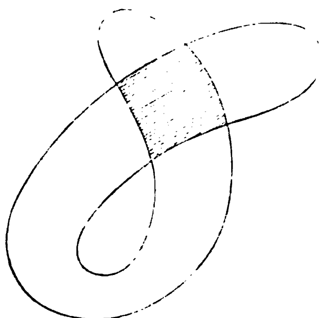
la fonction de l'argument complexe qui donnera la solution du problème. Nous allons énumérer les conditions auxquelles elle est assujettie :

1° Elle doit être uniforme et continue pour toutes les valeurs

de z représentées par des points pris à l'intérieur de l'aire (K); si z_0 désigne l'une de ces valeurs, elle sera développable dans le voisinage de la valeur z_0, suivant les puissances entières et positives de $z - z_0$.

2° La dérivée $f'(z)$ ne peut s'annuler pour aucun point z_0 compris dans l'intérieur de l'aire (K); car, si la dérivée s'annulait pour $z = z_0$, il y aurait, dans le voisinage du point z_0, au moins deux points z pour lesquels la fonction Z aurait la même valeur, et, par conséquent, à un point de l'aire (A) correspondraient plusieurs points de l'aire (K), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Fig. 7.



3° La fonction Z ne doit pas cesser d'être continue pour les valeurs réelles de z, qui sont représentées par des points de l'axe réel. Seulement, on ne suppose pas que, pour ces points, elle soit nécessairement développable suivant les puissances entières et positives de $z - z_0$; car elle n'est définie, dans leur voisinage, que pour les valeurs de z dont la partie imaginaire est positive.

4° Enfin z, considérée comme fonction de Z, doit satisfaire aux mêmes conditions que Z considérée comme fonction de z; c'est-à-dire qu'elle doit être, dans le voisinage du contour de l'aire (A), une fonction uniforme et continue de Z, prenant des valeurs réelles quand le point Z vient se placer sur le contour.

Réciproquement, si une fonction Z satisfait à toutes ces conditions, on démontrera aisément qu'elle donne la solution du problème. Plus généralement si, dans une aire quelconque (A), à connexion simple, se trouve définie une fonction Z uniforme à l'intérieur de cette aire et satisfaisant aux conditions que nous

venons d'énoncer, elle fournira une représentation conforme de (A) sur une aire (A′), à connexion simple comme la première, mais qui pourra, dans certaines parties, recouvrir plus d'une fois le plan si la fonction Z prend plusieurs fois les mêmes valeurs à l'intérieur de (A) (voir *fig.* 7).

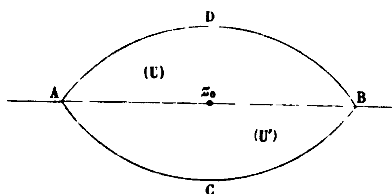
Après avoir indiqué les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction Z, nous allons exposer comment M. Schwarz a donné les moyens de déterminer cette fonction dans le cas où l'aire (A) est limitée par des droites ou par des arcs de cercle.

130. Voici le principe analytique sur lequel repose la solution [1].

Considérons une fonction Z de z définie seulement pour la partie supérieure du plan et satisfaisant d'ailleurs à toutes les conditions énumérées dans le numéro précédent. Si la fonction est réelle pour toutes les valeurs réelles de z voisines d'une valeur réelle z_0, elle sera développable dans le voisinage de z_0 en une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de z_0 et les coefficients de cette série seront tous réels.

Considérons, en effet (*fig.* 8), une aire (U) limitée par le con-

Fig. 8.



tour Az_0BD, comprise tout entière dans la partie supérieure du plan, et soit (U′) l'aire symétrique de la première par rapport à l'axe des x. La fonction Z n'est connue, par hypothèse, que pour la partie supérieure du plan. Mais on peut la définir aussi pour la partie inférieure en convenant qu'à deux valeurs imaginaires con-

---

(1) Ce principe a été énoncé et démontré par M. Schwarz dans un article déjà cité (*Journal de Crelle*, t. LXX, p. 107). Il a été aussi employé par Riemann dans le Mémoire sur les surfaces minima (*Gesammelte Werke*, p. 297).

juguées de la variable, qui sont représentées par deux points placés symétriquement par rapport à Ox, correspondent deux valeurs imaginaires conjuguées de la fonction. Ce *prolongement analytique* de la fonction laisse évidemment subsister la continuité puisque la fonction Z est, d'après sa définition, réelle et continue pour les valeurs réelles de z.

La fonction étant ainsi définie dans l'intérieur des aires (U) et (U′), considérons les deux intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(U)}\frac{Z\,dz}{z-\zeta},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(U')}\frac{Z\,dz}{z-\zeta},$$

prises le long des contours ABDA, ACBA des deux aires. D'après le théorème de Cauchy, la première de ces intégrales est égale à $f(\zeta)$ et la seconde est nulle lorsque le point ζ se trouve à l'intérieur de l'aire (U); si, au contraire, le point ζ se trouve à l'intérieur de (U′), le résultat est inverse; la première intégrale est nulle et l'autre est égale à $f(\zeta)$(¹). Donc, toutes les fois que le point ζ se trouve à l'intérieur de l'aire (U) + (U′), la somme des deux intégrales est égale à $f(\zeta)$. Mais, si l'on ajoute les deux intégrales, les parties relatives à la portion commune du contour AB, étant égales et contraires, se détruiront mutuellement, et il restera seulement l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{Z\,dz}{z-\zeta},$$

prise le long du contour ACBDA. Or on sait, et il est évident, que cette intégrale est développable en série dans le voisinage de tous les points à l'intérieur du contour et, en particulier, pour les valeurs réelles de ζ, qui sont représentées par les points de la droite AB.

On aura, en particulier, pour $\zeta = z_0$

$$Z - Z_0 = a(z-z_0) + b(z-z_0)^2 + c(z-z_0)^3 + \ldots,$$

(¹) Il y a ici une légère difficulté que nous nous contenterons de signaler et qu'il est d'ailleurs facile de faire disparaître, tenant à ce que l'on applique le théorème de Cauchy à une fonction qui n'est pas supposée développable en série pour les points du contour. On reconnaîtra aisément que le théorème est encore applicable toutes les fois que la fonction $f(z)$ est supposée continue dans le voisinage du contour de l'aire.

et comme à des valeurs réelles de z doivent correspondre des valeurs réelles de Z, les coefficients a, b, c seront tous réels. Si, de plus, il arrive, comme dans les exemples que nous allons traiter, que z considérée comme fonction de Z doive satisfaire aux mêmes conditions que Z considérée comme fonction de z, l'équation précédente, résolue par rapport à $z - z_0$, devra donner une série ordonnée par rapport aux puissances entières de $Z - Z_0$ et, par conséquent, le coefficient a sera toujours différent de zéro.

131. Ce lemme préliminaire étant établi, considérons d'abord une aire (A) limitée par des lignes droites (L_1), ..., (L_n). Soit Z_0 l'affixe d'un point situé sur une des lignes (L) et soit $h\pi$ l'angle de cette ligne avec l'axe réel. Considérons la fonction

$$(Z - Z_0)e^{-ih\pi}.$$

Pour un point Z situé à l'intérieur du contour, elle aura les mêmes propriétés que la fonction Z. Si le point Z se trouve sur la ligne (L) dans le voisinage de Z_0, elle sera réelle, et changera de signe quand Z passera par la valeur Z_0. Il suit de là que l'on peut appliquer le lemme démontré au numéro précédent et poser

$$(3) \qquad e^{-ih\pi}(Z - Z_0) = (z - z_0)p(z - z_0),$$

le symbole $p(z - z_0)$ désignant une série, ordonnée suivant les puissances positives et entières de $z - z_0$, dont tous les coefficients seront réels, le premier d'entre eux étant différent de zéro.

Étudions maintenant la fonction Z dans le voisinage de la valeur Z_0 qui correspond au point de rencontre de deux droites consécutives (L_k), (L_{k+1}) (*fig.* 9) faisant entre elles l'angle $\alpha\pi$.

Considérons la fonction $Z_0 - Z$; son argument, qui est l'angle de la droite ZZ_0 (*fig.* 9) avec l'axe réel, varie entre les deux limites

$$h_k\pi, \quad h_k\pi - \alpha\pi,$$

quand le point Z se déplace dans l'intérieur de l'aire et se dirige de (L_k) vers (L_{k+1}). Il suit de là que la fonction

$$[(Z_0 - Z)e^{-i\pi h_k}]^{\frac{1}{\alpha}}$$

sera réelle et positive sur le côté (L_k), réelle et négative sur le côté

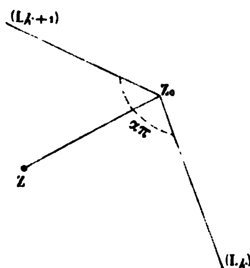
(L_{k+1}) et, d'ailleurs, elle aura les mêmes propriétés que la fonction Z à l'intérieur de l'aire (A). L'application du lemme précédent nous donnera donc

$$[(Z_0 - Z)e^{-i\pi h_k}]^{\frac{1}{\alpha}} = (z - z_0)p(z - z_0),$$

$p(z - z_0)$ ayant la même signification que précédemment. On peut encore écrire en élevant les deux membres de l'égalité à la puissance α

$$(4) \qquad Z - Z_0 = e^{i\pi h_k}(z - z_0)^\alpha p(z - z_0).$$

Fig. 9.



Enfin, pour tous les points à l'intérieur du contour, la dérivée de Z n'étant jamais nulle, on aura

$$(5) \qquad Z - Z_0 = (z - z_0)P(z - z_0),$$

$P(z - z_0)$ désignant une série analogue à la série $p(z - z_0)$, mais dont les coefficients ne sont pas nécessairement réels.

Il nous reste à considérer le point du contour qui correspond à la valeur infinie de z. Comme on peut toujours effectuer la substitution

$$z = \frac{-1}{z_1},$$

qui donne une représentation conforme de la portion supérieure du plan sur elle-même, ce cas se ramène aux précédents et l'on aura

$$(6) \qquad Z - Z_0 = \frac{e^{ih\pi}}{z}p\left(\frac{1}{z}\right)$$

si le point n'est pas un sommet du contour, et

$$\text{(7)} \qquad Z - Z_0 = \frac{e^{ih\pi}}{z^\alpha}\, p\left(\frac{1}{z}\right)$$

si le point est un sommet où les deux côtés consécutifs se rencontrent sous l'angle $\alpha\pi$, mesuré toujours dans l'intérieur de (A).

132. Les développements précédents embrassent toutes les hypothèses possibles. Pour éliminer les constantes Z_0 et h qui changent de valeur quand on passe de l'un à l'autre, considérons avec M. Schwarz la fonction

$$\text{(8)} \qquad \frac{d}{dz}\log\frac{dZ}{dz} = E(z).$$

On trouvera par un calcul facile :

1° Pour un point à l'intérieur de l'aire,

$$\text{(9)} \qquad E(z) = P_1(z - z_0);$$

2° Pour un point pris sur un des côtés du contour,

$$\text{(10)} \qquad E(z) = p_1(z - z_0);$$

3° Pour un sommet du contour correspondant à l'angle $\alpha\pi$

$$\text{(11)} \qquad E(z) = \frac{\alpha - 1}{z - z_0} + p_1(z - z_0),$$

$P_1(z - z_0), p_1(z - z_0)$ désignant des séries de puissances et les séries $p_1(z - z_0)$ ayant de plus leurs coefficients réels;

4° Enfin, pour le point correspondant à la valeur infinie de z,

$$\text{(12)} \qquad E(z) = -\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\, p_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

si ce point n'est pas un sommet du contour.

Les trois dernières formules nous montrent que la fonction $E(z)$ est réelle pour toutes les valeurs réelles de z et qu'elle peut, par conséquent, être prolongée analytiquement d'après la méthode indiquée au n° 130. D'ailleurs elle n'a, d'après les développements précédents, qu'un nombre limité de pôles, qui correspondent aux sommets du contour; et elle devient infiniment petite

pour z infiniment grand. D'après les théorèmes connus de la théorie des fonctions, elle sera donc une fraction rationnelle.

Soient a, b, c, ..., l les valeurs de z qui correspondent aux sommets du contour et soient $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, ..., $\lambda\pi$ les angles formés en ces sommets, mesurés dans l'intérieur du polygone. On aura

$$\text{(13)} \qquad E(z) = \sum \frac{\alpha - 1}{z - a} = \frac{d}{dz} \log \frac{dZ}{dz},$$

avec la condition

$$\Sigma(\alpha - 1) = -2,$$

qui n'est que l'expression analytique du théorème relatif à la somme des angles d'un polygone.

L'intégration de l'équation (13) nous donne

$$Z = C \int (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-l)^{\lambda-1}\,dz + C',$$

C et C′ désignant deux constantes arbitraires réelles ou imaginaires. En déplaçant l'aire (A) sans changer ni sa forme ni sa grandeur, on peut ramener l'expression de Z à la forme

$$\text{(14)} \qquad Z = H \int (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-l)^{\lambda-1}\,dz,$$

où H désigne une constante réelle.

Telle est la formule donnée par M. Schwarz [1] et par M. Christoffel [2].

Comme on peut prendre arbitrairement (n° 128) les valeurs de z qui correspondent à trois sommets du polygone, elle contient en réalité $2n - 3$ constantes. On peut disposer de ces constantes de manière à obtenir la représentation conforme d'un polygone quelconque, mais ce résultat essentiel se déduit seulement du théorème général démontré par Riemann et M. Schwarz sur la représentation conforme des aires planes quelconques, et nous ne connaissons aucun travail développé où se trouve étudiée d'une manière générale la détermination des constantes a, b, c, ..., l, H lorsque le polygone est donné. Vgl. Schläfli, Crelle 78, 1873

(1) SCHWARZ, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, p. 114; 1864, 1866.

(2) CHRISTOFFEL, *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie* (*Annali di Matematica*, t. I, p. 97; 1867).

Dans le cas du triangle, dont la forme est déterminée par la valeur des angles, la solution est évidente. En faisant varier la constante H, on obtiendra tous les triangles semblables à un triangle donné et l'on pourra déterminer cette constante de manière à obtenir l'un quelconque de ces triangles.

Si le polygone est un rectangle, on aura

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \tfrac{1}{2};$$

Z deviendra une intégrale elliptique que l'on pourra supposer ramenée à la forme normale

$$(15) \qquad Z = H\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Les côtés du rectangle seront

$$a = 2HK, \qquad b = HK',$$

K et K′ désignant les intégrales complètes qui entrent dans la formation des périodes; par conséquent, si l'on pose

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = e^{-\frac{2\pi b}{a}},$$

le module sera défini par l'équation

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4,$$

qui donnera ainsi, dans ce cas particulier, la solution complète du problème.

133. Passons maintenant à l'examen du cas où le contour est composé d'arcs de cercles; nous supposerons, pour plus de netteté, que deux cercles consécutifs ne soient jamais tangents.

Comme on peut toujours, au moyen de la transformation circulaire (nº **124**) définie par la formule

$$(16) \qquad Z = \frac{aZ_1 + b}{cZ_1 + d},$$

transformer en une ligne droite un quelconque des cercles qui composent le contour, et même deux cercles consécutifs de ce

contour, nous pourrons appliquer immédiatement les résultats obtenus au n° **131** et nous voyons que l'on pourra toujours choisir les constantes réelles ou imaginaires a, b, c, d de telle manière que Z_1 prenne la forme (3) sur un des côtés, et la forme (4) en un des sommets du contour. On aura donc pour Z les expressions suivantes :

1° En un point quelconque du contour,

$$Z = \frac{a(z-z_0)p(z-z_0)+b}{c(z-z_0)p(z-z_0)+d}; \tag{17}$$

2° En un sommet où deux cercles consécutifs font l'angle $\alpha\pi$, mesuré dans l'intérieur de l'aire,

$$Z = \frac{a(z-z_0)^\alpha p(z-z_0)+b}{c(z-z_0)^\alpha p(z-z_0)+d}; \tag{18}$$

3° Au point du contour qui correspond à la valeur ∞ de z,

$$Z = \frac{\frac{a}{z}p\left(\frac{1}{z}\right)+b}{\frac{c}{z}p\left(\frac{1}{z}\right)+d} \tag{19}$$

si le point n'est pas un des sommets du contour, et

$$Z = \frac{\frac{a}{z^\alpha}p\left(\frac{1}{z}\right)+b}{\frac{c}{z^\alpha}p\left(\frac{1}{z}\right)+d} \tag{20}$$

si le point est un sommet où deux côtés consécutifs font l'angle $\alpha\pi$.

4° Enfin, pour un point à l'intérieur de l'aire, on aura, comme précédemment,

$$Z - Z_0 = (z-z_0)P(z-z_0). \tag{21}$$

134. Dans ces différentes formules, a, b, c, d désignent des constantes réelles ou imaginaires, qui ont des valeurs différentes suivant les développements que l'on considère. Voici l'artifice ingénieux par lequel M. Schwarz a éliminé tout ce qui concerne ces constantes.

Soit, d'une manière générale,

$$Z = \frac{aT + b}{cT + d}, \qquad cZT + dZ - aT - b = 0$$

une relation entre deux fonctions Z et T d'une variable z. Si l'on élimine les constantes par la différentiation, on sera conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} (ZT)' & Z' & T' \\ (ZT)'' & Z'' & T'' \\ (ZT)''' & Z''' & T''' \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, prend la forme élégante

$$(22) \quad \frac{d^2}{dz^2}\left(\log\frac{dZ}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{dZ}{dz}\right)^2 = \frac{d^2}{dz^2}\left(\log\frac{dT}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{dT}{dz}\right)^2,$$

où les variables sont séparées. Si l'on adopte une notation de M. Cayley (¹) et si l'on pose

$$(23) \qquad \{Z, z\} = \frac{d^2}{dz^2}\left(\log\frac{dZ}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{dZ}{dz}\right)^2,$$

on aura donc

$$\{Z, z\} = \{T, z\}.$$

En nous servant des résultats précédents, nous allons étudier le développement de la fonction $\{Z, z\}$ pour tous les points situés à l'intérieur ou sur le contour de l'aire (A) :

1° Pour un point quelconque du contour, il faut remplacer T par le développement

$$(z - z_0)p(z - z_0),$$

qui entre dans la formule (17). On trouve ainsi un résultat de la forme

$$\{Z, z\} = h(z - z_0) + k(z - z_0)^2 + \ldots.$$

2° Pour un sommet, la valeur de T est celle qui figure dans la formule (18),

$$T = (z - z_0)^{\alpha} p(z - z_0).$$

(¹) Cayley, *On the schwarzian derivative and the polyhedral functions* (*Cambridge philosophical Transactions*, mars 1880).

Un calcul facile donne alors

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{(z-z_0)^2} + \frac{h}{z-z_0} + k + l(z-z_0) + \ldots.$$

3° Pour le point du contour correspondant à la valeur ∞ de z, on trouve de même

$$\{Z, z\} = \frac{h}{z^4} + \frac{k}{z^5} + \ldots,$$

si le point n'est pas un sommet et si l'on emploie la valeur de T correspondante au développement (19). Si, au contraire, le point est un sommet, il faut mettre pour T la valeur $\frac{1}{z^\alpha} p\left(\frac{1}{z}\right)$, ce qui donne

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{z^2} + \frac{h}{z^3} + \frac{k}{z^4} + \ldots.$$

Remarquons d'une manière générale que, pour tous ces développements, les coefficients sont tous réels. La fonction $\{Z, z\}$ est donc réelle pour toutes les valeurs réelles de z; elle pourra être prolongée analytiquement d'après la méthode du n° 130 et sera, par suite, définie dans toute l'étendue du plan.

4° Enfin, pour un point à l'intérieur de (A), la dérivée $\frac{dZ}{dz}$ ne sera jamais nulle et $\{Z, z\}$ sera, comme z, une fonction développable pour toutes les valeurs de z.

La fonction $\{Z, z\}$, ayant toutes les propriétés d'une fraction rationnelle pour les valeurs finies de z, et devenant infiniment petite pour z infini, sera une fraction rationnelle. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs de z qui correspondent aux sommets du contour, $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ les angles correspondants formés par deux côtés consécutifs. Si l'on a, pour $z = a_i$,

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\frac{1-\alpha_i^2}{(z-a_i)^2} + \frac{h_i}{z-a_i} + k_i + \ldots,$$

la fonction

$$\{Z, z\} - \sum \frac{1}{2}\frac{1-\alpha_i^2}{(z-a_i)^2} - \sum \frac{h_i}{z-a_i},$$

demeurant finie pour toutes les valeurs finies de z et devenant infiniment petite pour z infini, sera nécessairement égale à zéro;

l'on aura, par conséquent,

$$(24) \qquad \{Z, z\} = \sum \frac{1}{2} \frac{1-\alpha_i^2}{(z-a_i)^2} + \sum \frac{h_i}{z-a_i} = F(z).$$

Si le point du contour, qui correspond à la valeur infinie de z, n'est pas un sommet, il faudra, nous l'avons vu, que le développement du second membre suivant les puissances de $\frac{1}{z}$, commence au terme en $\frac{1}{z^4}$, ce qui donnera les égalités

$$(25) \qquad \begin{cases} \Sigma h_i = 0, \\ \sum\left(a_i h_i + \dfrac{1-\alpha_i^2}{2}\right) = 0, \\ \Sigma[a_i^2 h_i + a_i(1-\alpha_i^2)] = 0, \end{cases}$$

auxquelles devront satisfaire les constantes h_i, α_i.

Si, au contraire, le point du contour correspondant à la valeur $z = \infty$ est un sommet où l'angle de deux côtés consécutifs est $\beta\pi$, le développement devra commencer par le terme $\frac{1-\beta^2}{2z^2}$, ce qui donnera seulement les deux relations

$$(26) \qquad \begin{cases} \Sigma h_i = 0, \\ \sum\left(a_i h_i + \dfrac{1-\alpha_i^2}{2}\right) = \dfrac{1-\beta^2}{2}. \end{cases}$$

135. La valeur de $\{Z, z\}$ étant obtenue, la suite des raisonnements nous conduit à considérer l'équation du troisième ordre

$$(27) \qquad \{Z, z\} = F(z),$$

et à essayer de l'intégrer.

L'origine et les propriétés de cette équation simplifient beaucoup la résolution de ce problème.

En effet, d'après le mode de formation de l'expression $\{Z, z\}$, la relation différentielle

$$\{Z, z\} = \{Z_1, z\}$$

est *équivalente* à la relation, en termes finis,

$$Z = \frac{aZ_1 + b}{cZ_1 + d},$$

et, par suite, la connaissance d'*une seule* solution particulière Z_1 de l'équation (27) entraînera celle de l'intégrale générale, qui sera donnée par la formule précédente, où les constantes a, b, c, d pourront recevoir des valeurs quelconques. Cette propriété si remarquable de l'équation (27) la rapproche des équations linéaires et, effectivement, il est aisé de montrer que l'intégration de cette équation peut être ramenée à celle d'une équation linéaire du second ordre.

Considérons en effet une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + p\frac{d\theta}{dz} + q\theta = 0, \tag{28}$$

où p et q sont des fonctions données de z, et cherchons l'équation différentielle à laquelle satisfait le rapport

$$Z = \frac{\theta_2}{\theta_1} \tag{29}$$

de deux intégrales particulières. On trouvera, par un calcul facile,

$$\{Z, z\} = 2q - \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz}. \tag{30}$$

L'équation ainsi obtenue est de même forme que la proposée (27). Il suffira de choisir p arbitrairement, de déterminer q par la relation

$$2q - \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz} = F(z), \tag{31}$$

et l'intégration de l'équation (27) sera ramenée à celle de l'équation linéaire (28). Si l'on prenait, par exemple, $p = 0$, l'équation linéaire se réduirait à la suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \tfrac{1}{2}F(z)\theta = 0. \tag{32}$$

Au reste, on s'explique qu'une certaine indétermination puisse subsister relativement à l'équation linéaire, puisque le rapport de deux intégrales particulières ne change pas quand on les multiplie l'une et l'autre par une même fonction donnée, mais quelconque, de z.

L'équation (32), ainsi que toutes celles que l'on obtiendrait en

prenant pour p la valeur suivante

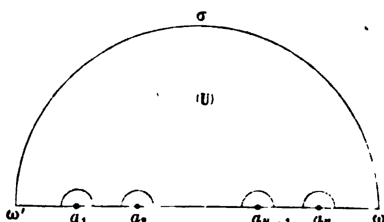
$$p = \sum \frac{\beta_i}{z - a_i},$$

où les constantes β_i sont des nombres réels quelconques, a tous ses coefficients et tous ses points singuliers réels; de plus, toutes ses intégrales sont *régulières*.

Réciproquement, si l'on considère *a priori* une équation linéaire quelconque du second ordre possédant toutes ces propriétés, on peut établir que le rapport de ses intégrales donne la représentation conforme sur la partie supérieure du plan d'une aire plus ou moins complexe limitée par des arcs de cercle.

Marquons en effet sur l'axe réel (*fig.* 10) les points singuliers

Fig. 10.



$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ de l'équation, et soit

$$Z = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

le rapport de deux intégrales particulières quelconques qui, d'après les hypothèses relatives à l'équation, sont des fonctions uniformes de z dans l'aire (U) limitée par l'axe réel et par le demi-cercle $\omega\sigma\omega'$ de rayon infini. Dans chacun des intervalles $a_1 a_2$, $a_2 a_3, \ldots, a_{i-1} a_i, \ldots, a_n \infty a_1$, on pourra obtenir deux intégrales particulières qui seront réelles toutes les deux pour des valeurs réelles de z. Si l'on désigne, par exemple, par t_{i-1} le rapport de ces deux intégrales dans l'intervalle $a_{i-1} a_i$, on aura évidemment

$$Z = \frac{\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} t_{i-1}}{\gamma_{i-1} + \delta_{i-1} t_{i-1}},$$

$\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}, \gamma_{i-1}, \delta_{i-1}$ désignant des constantes réelles ou imaginaires,

et comme la variable t_{i-1} demeure réelle lorsque le point z décrit le segment $a_{i-1}a_i$, on voit que le point Z décrira un arc de cercle. Les arcs de cercles décrits par le point Z qui correspondent ainsi aux n intervalles forment un polygone fermé dans lequel les côtés consécutifs se coupent sous des angles dont la grandeur est quelconque; deux côtés consécutifs peuvent même être tangents quand les développements des intégrales dans le voisinage d'un point singulier contiennent des logarithmes. Mais l'examen de tous les cas, la définition précise de l'aire dont on obtient ainsi la représentation conforme nous entraîneraient trop loin.

Nous nous contenterons de remarquer que l'équation (27) contient bien le nombre de constantes qui est nécessaire si l'on veut effectuer la représentation conforme d'un polygone quelconque composé d'arcs de cercle sur la partie supérieure du plan. En effet, la fonction $F(z)$ dépend de $3n$ constantes réelles liées par les trois équations (25), et, comme d'ailleurs on peut prendre arbitrairement trois des quantités a_i (nº **128**), il reste seulement $3n - 6$ paramètres réels; mais il faut leur ajouter six autres paramètres réels servant à former les trois constantes imaginaires qui figurent dans l'intégrale générale de l'équation (27). Le nombre $3n$ de constantes réelles ainsi obtenu est précisément égal à celui des paramètres arbitraires dont dépend un polygone formé de n arcs de cercle.

Il résulte d'une proposition générale, à laquelle M. Schwarz est parvenu par la méthode la plus élégante dans l'article déjà cité [1], que l'on pourra toujours déterminer ces constantes de manière à obtenir effectivement la solution du problème proposé.

136. Proposons-nous, comme application, de déterminer la représentation conforme d'un triangle formé par trois arcs de cercle. Nous pouvons toujours supposer que les trois sommets de ce triangle correspondent aux valeurs 0, 1, ∞ de z. Soient $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ les angles du triangle en ces trois sommets. Nous aurons ici

$$\{Z, z\} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{a_1}{z} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2}{(1-z)^2} + \frac{a_2}{z-1},$$

(1) *Monatsberichte*, p. 768-784; 1870.

et de plus le développement suivant les puissances positives de $\frac{1}{z}$ devra commencer par le terme $\frac{1}{2}\frac{1-\nu^2}{z^2}$. Cette condition détermine a_1, a_2, et l'on trouve

$$(33) \qquad \{Z, z\} = \frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1-\mu^2}{(1-z)^2} + \frac{1}{2}\frac{1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{z(1-z)}.$$

Or, si l'on considère l'équation

$$(34) \qquad z(1-z)\frac{d^2\theta}{dz^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\frac{d\theta}{dz} - \alpha\beta\theta = 0,$$

qui définit la série hypergéométrique de Gauss, on reconnaît aisément, en appliquant la formule (30), que le rapport de ses deux intégrales satisfait à l'équation (33) si l'on prend

$$(35) \qquad \lambda^2 = (1-\gamma)^2, \qquad \mu^2 = (\gamma-\alpha-\beta)^2, \qquad \nu^2 = (\alpha-\beta)^2.$$

On pourra donc exprimer Z par le quotient de deux intégrales particulières de l'équation (34). Ces intégrales sont bien connues; on peut déterminer les variations qu'elles éprouvent quand on suit un chemin quelconque du plan ([1]) et l'on vérifie qu'elles fournissent effectivement la représentation cherchée.

Parmi les quatre systèmes de valeurs de α, β, γ déterminés par les équations (35), choisissons le suivant, par exemple

$$(36) \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu+\nu), \\ \beta = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu-\nu), \\ \gamma = 1-\lambda, \end{cases}$$

L'équation différentielle (34) admet plusieurs solutions particulières, parmi lesquelles nous distinguerons les suivantes

$$(37) \qquad \begin{cases} \theta_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z), \\ \theta_2 = z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z), \\ \theta_3 = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-z), \\ \theta_4 = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-z), \end{cases}$$

([1]) Kummer, *Ueber die hypergeometrische Reihe* (*Journal de Crelle*, t. XV, 1836).

Goursat (E.), *Sur l'équation différentielle lineaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, Supplément au t. X; 1881).

où le symbole F désigne la série hypergéométrique de Gauss. Si l'on convient que les arguments de z et de $1 - z$ seront pris égaux à zéro quand la variable z sera réelle et comprise entre 0 et 1, ces intégrales seront déterminées sans ambiguïté pour toute la région supérieure du plan, et les formules que l'on trouvera aux pages 20 et 21 du beau Mémoire de M. Goursat permettront d'en calculer la valeur pour chaque point de cette région. Elles satisfont d'ailleurs, dans toute la région considérée, aux deux équations (que l'on trouvera à la page 28 de ce Mémoire)

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta_1 &= a\theta_3 + b\theta_4,\\ \theta_2 &= a'\theta_3 + b'\theta_4,\end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, & b &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},\\ a' &= \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}, & b' &= \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}.\end{aligned}\right.$$

Ces points étant admis, désignons par C une constante réelle ou imaginaire et posons

$$(40)\qquad CZ = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

Quand z varie entre 0 et 1, le rapport $\frac{\theta_2}{\theta_1}$ est réel, l'argument de Z est constant et égal à celui de $\frac{1}{C}$. Le point Z décrit donc un segment de droite OA (*fig.* 11). Si au contraire le point z passe, par la partie supérieure du plan, aux valeurs comprises entre 0 et $-\infty$, θ_1 reste réelle, l'argument de θ_2 devient égal à $\pi(1-\gamma)$ ou $\pi\lambda$. L'argument de Z augmente donc de $\pi\lambda$, et, comme il demeure encore constant, le point Z décrit un segment OB ayant son origine en O et faisant avec OA l'angle $\lambda\pi$.

Supposons maintenant que z passe, par la région supérieure du plan, aux valeurs comprises entre 1 et $+\infty$. L'intégrale θ_3 est réelle. Quant à l'intégrale θ_4, elle est imaginaire et, comme l'argument de $1 - z$ devient égal à $-\pi$, celui de l'intégrale est

$$-\pi(\gamma-\alpha-\beta) \qquad \text{ou} \qquad -\mu\pi.$$

Si donc on pose

$$\frac{\theta_4}{\theta_3} = e^{-i\mu\pi}T,$$

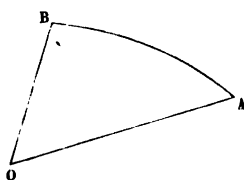
la variable T sera réelle. En divisant membre à membre les deux équations (38), on aura

$$\mathrm{CZ} = \frac{a' + b' e^{-i\mu\pi}\mathrm{T}}{a + b e^{-i\mu\pi}\mathrm{T}}.$$

Si l'on change i en $-i$ et si l'on désigne par C_0, Z_0 les imaginaires conjuguées de C et de Z, on trouvera

$$\mathrm{C}_0\mathrm{Z}_0 = \frac{a' + b' e^{i\mu\pi}\mathrm{T}}{a + b e^{i\mu\pi}\mathrm{T}}.$$

Fig. 11.



Il ne reste plus qu'à éliminer T entre les deux équations précédentes et l'on obtient l'équation

$$\begin{aligned}&(a'b'\mathrm{CC}_0\mathrm{ZZ}_0 + ab)(1 - e^{2i\mu\pi})\\ &\quad + \mathrm{CZ}(ba'e^{2i\mu\pi} - ab') + \mathrm{C}_0\mathrm{Z}_0(ab'e^{2i\mu\pi} - ba') = 0,\end{aligned}$$

qui représente l'arc de cercle passant par les points A, B et décrit par le point Z quand z varie entre 1 et $+\infty$.

La puissance t^2 de l'origine par rapport au cercle précédent a pour expression

$$t^2 = \frac{1}{\mathrm{CC}_0}\,\frac{ab}{a'b'}$$

ou, en remplaçant a, b, a', b' par leurs valeurs,

$$(41)\quad t^2 = \frac{1}{\mathrm{CC}_0}\,\frac{\Gamma^2(1+\lambda)}{\Gamma^2(1-\lambda)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}.$$

Le calcul de cette puissance t^2 offre de l'intérêt; car, si elle est positive, il y aura un cercle décrit de l'origine comme centre et coupant à angle droit le côté AB, c'est-à-dire un cercle orthogonal aux trois côtés du triangle OAB. Si, au contraire, elle est négative, il n'y aura pas de cercle réel satisfaisant à ces conditions.

Comme les arguments des fonctions Γ qui figurent dans la formule précédente sont tous supérieurs à — 1, ces fonctions auront le même signe que les variables dont elles dépendent. On reconnaît ainsi que la puissance t^2 sera négative, si l'on a

$$(42)\qquad \begin{cases} \lambda + \mu + \nu > 1, \\ \nu + 1 > \lambda + \mu, \\ \mu + 1 > \lambda + \nu, \\ \lambda + 1 > \mu + \nu, \end{cases}$$

c'est-à-dire si les angles du triangle OAB satisfont à toutes les relations d'inégalité qui existent entre les angles d'un triangle sphérique. Au contraire, la puissance t^2 sera positive si les inégalités précédentes ne sont pas toutes vérifiées. Ce résultat est bien conforme à celui que donne la Géométrie : pour qu'un triangle formé par trois arcs de cercle soit la projection stéréographique d'un triangle sphérique, il faut et il suffit, comme on sait, que le cercle orthogonal aux trois côtés du triangle soit imaginaire.

Si, au lieu de la variable Z définie par la formule (40), nous avions choisi la suivante

$$Z_1 = \frac{aZ + b}{cZ + d},$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques, nous aurions obtenu, au lieu du triangle OAB, un triangle ayant les mêmes angles, mais dont les côtés auraient été, en général, des arcs de cercle; car il se déduit du triangle OAB par une transformation circulaire quelconque.

Supposons que les angles λ, μ, ν satisfassent aux relations d'inégalité (42) et prenons pour le module de C la valeur

$$(43)\qquad \begin{cases} \sqrt{CC_0} = \dfrac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} \\ \quad \times \sqrt{-\dfrac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\mu-\nu}{2}\right)}}, \end{cases}$$

t^2 deviendra égal à — 1 et les trois côtés du triangle OAB seront orthogonaux au cercle de rayon i ayant l'origine pour centre. On sait que, dans ce cas, les trois côtés peuvent être considérés

comme la projection stéréographique de trois arcs de grand cercle tracés sur la sphère de rayon 1 ayant l'origine pour centre. Si donc on représente, suivant la méthode de Riemann indiquée au n° **30**, la variable Z par un point de cette sphère, les résultats précédents donnent la représentation conforme de l'aire d'un triangle sphérique sur la partie supérieure du plan. Le sommet de ce triangle qui correspond à l'angle $\lambda\pi$ est placé au point le plus bas de la sphère et diamétralement opposé au pôle de la projection stéréographique.

CHAPITRE V.

DU SYSTÈME ORTHOGONAL FORMÉ PAR LES LIGNES DE COURBURE.

Équation différentielle des lignes de courbure. — Application à la surface $x^m y^n z^p = C$. — Formules d'Olinde Rodrigues. — Représentation sphérique de Gauss. — Équation linéaire dont les caractéristiques sont les lignes de courbure. — Lignes de courbure des cyclides. — L'inversion conserve les lignes de courbure. — Théorème de Dupin relatif aux systèmes triples orthogonaux.

---

137. Les propriétés des systèmes orthogonaux et isothermes ne dépendent que de la forme de l'élément linéaire et se conservent quand on déforme la surface sans altération des longueurs des arcs. Il n'en est plus de même pour le système orthogonal qui est formé par les deux familles de lignes de courbure. Mais ce système se distingue de tous les autres par une propriété essentielle; il est à la fois orthogonal et conjugué, il a un rôle extrêmement important dans l'examen d'un grand nombre de problèmes relatifs à la théorie des surfaces et, à tous ces points de vue, il mérite que nous en fassions dès à présent une étude assez détaillée.

Une ligne de courbure peut être, on le sait, définie par cette propriété que les normales à la surface en ses différents points forment une surface développable. L'arête de rebroussement de cette développable est évidemment une des développées de la ligne de courbure, le point de contact de chaque normale avec l'arête de rebroussement est le centre de courbure principal correspondant à la ligne de courbure considérée. Nous allons indiquer d'abord comment on obtient l'équation différentielle des lignes de courbure.

138. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface considérée, u, v, w des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale en ce point. Les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque de la normale auront

pour expressions

$$(1) \qquad X = x + u\lambda, \qquad Y = y + v\lambda, \qquad Z = z + w\lambda,$$

λ étant une arbitraire dont la variation donnera tous les points de la normale. Exprimons qu'il existe un déplacement pour lequel ce point décrit une courbe tangente à la normale; nous aurons les équations

$$\frac{d(x + u\lambda)}{u} = \frac{d(y + v\lambda)}{v} = \frac{d(z + w\lambda)}{w}$$

ou, plus simplement, en retranchant $d\lambda$ des trois rapports égaux,

$$(2) \qquad \frac{dx + \lambda\, du}{u} = \frac{dy + \lambda\, dv}{v} = \frac{dz + \lambda\, dw}{w}.$$

L'élimination de λ nous donnera l'équation différentielle

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} dx & du & u \\ dy & dv & v \\ dz & dw & w \end{vmatrix} = 0,$$

qui est celle des lignes de courbure. En la développant, on trouve

$$(4) \quad du(v\,dz - w\,dy) + dv(w\,dx - u\,dz) + dw(u\,dy - v\,dx) = 0.$$

Cette équation détermine les directions des deux lignes de courbure qui passent en chaque point de la surface; les formules (2) feront connaître la valeur de λ relative à chaque ligne de courbure, et le centre de courbure correspondant sera alors défini par les formules (1).

139. On est encore conduit à l'équation (4), si l'on emploie une autre méthode qui repose exclusivement sur l'emploi des *coordonnées* de la normale. On sait que Plücker a considéré la ligne droite comme un élément de l'espace et qu'il l'a définie, comme on le fait pour un point ou un plan, par des coordonnées. Nous allons indiquer le système de détermination qui conduit aux calculs les plus symétriques.

Soient

$$(5) \qquad \begin{cases} bz - cy + a' = 0, \\ cx - az + b' = 0 \end{cases}$$

les équations d'une ligne droite. On pourra joindre à ces équations la suivante

$$(5') \qquad ay - bx + c' = 0,$$

pourvu que c' soit déterminé par l'équation

$$(6) \qquad aa' + bb' + cc' = 0.$$

Les équations (5), (5') représentent les projections de la droite sur les trois plans coordonnés. Cette droite est parfaitement déterminée quand on connaît les six quantités a, a', b, b', c, c'; nous dirons que ces six quantités, qui doivent toujours satisfaire à la condition (6), sont les *coordonnées homogènes* de la ligne droite.

Supposons que ces six coordonnées soient des fonctions données d'un paramètre; la droite engendrera une surface réglée. Pour que cette surface soit développable, il faudra qu'il existe une courbe tangente à toutes les positions de la droite; en d'autres termes, il faudra que l'on puisse déterminer les coordonnées x, y, z d'un point variable vérifiant les équations de la droite et satisfaisant aux conditions

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

Si l'on différentie les équations (5) et (5') en tenant compte des relations précédentes, on trouvera que les coordonnées x, y, z doivent vérifier les trois équations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} z\,db - y\,dc + da' &= 0, \\ x\,dc - z\,da + db' &= 0, \\ y\,da - x\,db + dc' &= 0, \end{aligned} \right.$$

qui ne contiennent pas dx, dy, dz. Si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par da, db, dc, on obtient la condition

$$(8) \qquad da\,da' + db\,db' + dc\,dc' = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire les différentielles des coordonnées. On démontrera aisément que cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante; et, quand elle sera remplie, les formules (5) et (7) feront connaître, pour chaque valeur de la variable indé-

pendante, le point de contact de la génératrice avec l'arête de rebroussement.

Dans le cas qui nous occupe les équations de la normale sont

$$\frac{X-x}{u} = \frac{Y-y}{v} = \frac{Z-z}{w}.$$

Par conséquent, les six coordonnées de la normale sont u, v, w et les quantités u', v', w' définies par les égalités

$$(9) \qquad \begin{cases} vz - wy + u' = 0, \\ wx - uz + v' = 0, \\ uy - vx + w' = 0. \end{cases}$$

La condition pour que la normale engendre une surface développable sera donc exprimée par l'équation

$$(10) \qquad du\,du' + dv\,dv' + dw\,dw' = 0,$$

que l'on reconnaîtra facilement être équivalente à l'équation (4).

140. Proposons-nous, pour donner une application de la méthode précédente, de déterminer les lignes de courbure de la surface

$$(11) \qquad x^m y^n z^p = C,$$

où m, n, p, C sont des constantes quelconques. L'équation différentielle de la surface sera

$$m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y} + p\frac{dz}{z} = 0;$$

les formules (1) deviendront ici

$$X = x - \frac{m\lambda}{x}, \qquad Y = y - \frac{n\lambda}{y}, \qquad Z = z - \frac{p\lambda}{z},$$

et les équations (2) nous donneront

$$(12) \qquad \frac{dx\left(\lambda + \frac{x^2}{m}\right)}{x} = \frac{dy\left(\lambda + \frac{y^2}{n}\right)}{y} = \frac{dz\left(\lambda + \frac{z^2}{p}\right)}{z}.$$

Si nous substituons les valeurs de dx, dy, dz dans l'équation différentielle de la surface, nous aurons l'équation du second

degré

$$(13) \qquad \frac{m}{\lambda + \frac{x^2}{m}} + \frac{n}{\lambda + \frac{y^2}{n}} + \frac{p}{\lambda + \frac{z^2}{p}} = 0,$$

qui fera connaître les valeurs de λ correspondantes aux deux lignes de courbure.

Au lieu de faire correspondre à chaque racine de cette équation la ligne de courbure dont la direction est définie par les formules (12), on peut considérer la ligne de courbure perpendiculaire. En désignant par dx, dy, dz les différentielles relatives à cette seconde ligne, on aura l'équation

$$(14) \qquad \frac{x\,dx}{\lambda + \frac{x^2}{m}} + \frac{y\,dy}{\lambda + \frac{y^2}{n}} + \frac{z\,dz}{\lambda + \frac{z^2}{p}} = 0,$$

qui, jointe à l'équation différentielle de la surface, déterminerait les rapports de dx, dy, dz. Ainsi, pour obtenir les équations différentielles des deux familles de lignes de courbure, il suffira de remplacer successivement, dans l'équation (14), λ par les deux racines de l'équation (13).

Ce point étant admis, l'intégration est facile. Multiplions en effet l'équation (14) par 2 et ajoutons-lui l'équation (13) multipliée par $d\lambda$. Nous obtiendrons ainsi une différentielle exacte

$$d\left[m\,\mathrm{L}\left(\lambda + \frac{x^2}{m}\right) + n\,\mathrm{L}\left(\lambda + \frac{y^2}{n}\right) + p\,\mathrm{L}\left(\lambda + \frac{z^2}{p}\right)\right] = 0,$$

et, en intégrant, nous aurons

$$(15) \qquad u = \left(\lambda + \frac{x^2}{m}\right)^m \left(\lambda + \frac{y^2}{n}\right)^n \left(\lambda + \frac{z^2}{p}\right)^p,$$

u désignant le paramètre de la ligne de courbure. Il faudra, pour obtenir les deux familles, remplacer successivement λ par les deux racines de l'équation (13). Si l'on remarque maintenant que cette équation (13) s'obtient en égalant à zéro la dérivée de l'équation (15) par rapport à λ, on sera conduit au théorème suivant :

Si, dans l'équation (15), *on considère u comme une constante et λ comme un paramètre variable, les enveloppes des surfaces représentées par cette équation, correspondantes aux diverses*

valeurs de u, coupent la surface proposée suivant ses lignes de courbure.

On voit que ces lignes de courbure seront algébriques toutes les fois que la surface proposée le sera, c'est-à-dire toutes les fois que m, n, p seront commensurables. On reconnaîtra de plus, par un calcul facile, que la famille de surfaces représentée par l'équation (11) dans laquelle on donne à C toutes les valeurs possibles, et les deux familles d'enveloppes dont il est question dans l'énoncé précédent forment un système triple orthogonal ([1]).

Supposons, par exemple, que l'on prenne

$$m = n = -p = 1.$$

L'équation (11) prendra la forme

$$\frac{xy}{z} = C. \tag{16}$$

L'équation (13) admettra pour racines

$$z^2 \pm \sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)};$$

il en résultera, pour u, les deux valeurs suivantes

$$\sqrt{u'} = \sqrt{z^2+x^2} + \sqrt{z^2+y^2}, \tag{17}$$

$$\sqrt{u''} = \sqrt{z^2+x^2} - \sqrt{z^2+y^2}. \tag{18}$$

Les surfaces représentées par ces deux dernières équations sont les lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs

---

([1]) Dans son *Mémoire sur les surfaces orthogonales,* inséré en 1847 au *Journal de Liouville* (1re série, t. XII, p. 246), M. J.-A. Serret, développant une remarque de M. Bouquet, a montré, le premier, que les surfaces représentées par l'équation (11) constituent une des familles d'un système triple orthogonal et il a indiqué les moyens de déterminer les deux autres familles qui complètent le système. Mais il n'a développé les calculs que dans les deux cas

$$m=1, \quad n=1, \quad p=1, \quad \text{et} \quad m=1, \quad n=1, \quad p=-1.$$

La méthode suivie dans le texte est exposée, avec les généralisations qu'elle comporte, dans un *Mémoire sur la Théorie des coordonnées curvilignes et des systèmes orthogonaux* publié par l'auteur (*Annales de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. VII, p. 227; 1878).

distances à l'axe des x et à l'axe des y, c'est-à-dire à deux droites rectangulaires qui se coupent, soit constante.

Si l'on prenait

$$m = n = p = 1,$$

les équations des trois familles prendraient la forme

$$(19)\quad \begin{cases} xyz = C, \\ 3\sqrt{3}\sqrt{u'} = (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}}, \\ 3\sqrt{3}\sqrt{u''} = (x^2 + \omega y^2 + \omega^2 z^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2 + \omega^2 y^2 + \omega z^2)^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. Ce résultat est dû à M. Cayley.

141. Revenons à la théorie générale. Les formules (2) prennent une forme particulièrement remarquable si l'on suppose que u, v, w, au lieu d'être simplement proportionnels aux cosinus directeurs de la normale, soient égaux à ces cosinus que nous appellerons c, c', c''. Alors les formules (1) prendront la forme

$$(20)\qquad X = x + cR, \qquad Y = y + c'R, \qquad Z = z + c''R,$$

et définiront un point de la normale situé à la distance R du pied de cette normale; cette distance R aura d'ailleurs un signe, elle devra être portée dans le sens défini par les cosinus c, c', c'', si elle est positive, et en sens contraire si elle est négative. Les formules (2) nous donneront les suivantes :

$$\frac{dx + R\,dc}{c} = \frac{dy + R\,dc'}{c'} = \frac{dz + R\,dc''}{c''}.$$

Ajoutons les numérateurs et les dénominateurs après les avoir multipliés respectivement par c, c', c'', nous trouverons, en tenant compte de l'équation évidente

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0,$$

que la valeur commune de ces rapports est égale à zéro.

On peut donc écrire les formules suivantes :

$$(21)\qquad dx + R\,dc = 0, \qquad dy + R\,dc' = 0, \qquad dz + R\,dc'' = 0,$$

qui sont dues à Olinde Rodrigues et qui jouent un rôle essentiel

dans la théorie des lignes de courbure. R désigne le rayon de courbure principal correspondant à la ligne considérée, et les coordonnées du centre de courbure correspondant sont définies par les formules (20).

142. On obtient aussi les équations d'Olinde Rodrigues en faisant usage d'une notion très importante qui est due à Gauss, celle de la *représentation sphérique*. Envisageons une portion quelconque d'une surface donnée et attribuons un sens aux normales en tous les points de cette région, en nous attachant à satisfaire à la condition que les cosinus directeurs c, c', c'' de la normale soient des fonctions continues des deux paramètres qui définissent le pied de cette normale. Construisons maintenant le point dont les coordonnées rectangulaires sont c, c', c''; il appartient évidemment à la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, et l'on voit que nous établissons point par point une correspondance entre cette sphère et la surface donnée. A un point M de la surface correspondra un point m de la sphère, à une courbe de la surface une courbe de la sphère, à une région continue de la surface une région également continue de la sphère. Ce mode de correspondance a reçu le nom de *représentation sphérique* ou d'*image sphérique* de la surface, et Gauss en a fait usage, nous le verrons plus tard, pour établir et formuler une des propositions les plus importantes de la théorie qui nous occupe.

Si nous considérons un point quelconque M de la surface et son image sphérique m, il résulte de notre définition que le plan tangent à la surface au point M est parallèle au plan tangent de la sphère en m; les normales aux deux surfaces sont parallèles, et, en ce qui regarde leurs sens, on voit qu'au sens positif de la normale à la surface correspond celui de la normale extérieure à la sphère.

Imaginons que le point M se déplace à partir de sa position initiale sur la surface et décrive un élément de courbe MM', le point m qui lui sert d'image se déplacera à partir de m et décrira un élément de courbe mm'. Cherchons la relation entre ces deux éléments correspondants.

Il est évident d'abord que l'arc mm' mesure en grandeur l'angle des normales en M et M' ou, ce qui est la même chose, l'angle

infiniment petit des plans tangents à la surface en ces deux points. C'est là une première propriété très importante de la représentation sphérique : elle permet d'étudier géométriquement la variation du plan tangent.

D'autre part, la tangente mm' de la sphère et la tangente MM' de la surface ont évidemment pour conjuguées des droites qui sont parallèles, puisque les plans tangents aux points correspondants des deux surfaces le sont toujours. Or, dans la sphère, la conjuguée d'une tangente est perpendiculaire à cette tangente. On peut donc énoncer la proposition suivante :

L'angle des tangentes en m et en M *aux deux courbes correspondantes mm' et* MM' *est complémentaire de l'angle formé par la tangente à la surface avec sa conjuguée.*

Ou autrement :

A une tangente MT *de la surface ayant pour conjuguée* MT' *correspond une tangente mt de la sphère perpendiculaire à* MT'.

Appliquons cette remarque générale aux cas particuliers les plus intéressants.

Supposons d'abord que MT soit une tangente asymptotique : elle coïncidera avec sa conjuguée MT' et sera, par conséquent, perpendiculaire à son image sphérique. On aura donc l'équation différentielle des lignes asymptotiques en écrivant que les déplacements correspondants sur la surface et sur la sphère sont perpendiculaires. On est ainsi conduit à l'équation

$$dx\, dc + dy\, dc' + dz\, dc'' = 0,$$

que l'on déduit, en effet, de la première des formules (24) [p. 138] en y faisant $t = 1$.

Prenons maintenant pour MT une tangente principale : MT sera perpendiculaire à MT' et, par conséquent, parallèle à mt; et, réciproquement, si MT est parallèle à mt, elle sera perpendiculaire à sa conjuguée. Ainsi, les tangentes principales sont caractérisées par la propriété d'être parallèles à leur représentation sphérique. En écrivant les conditions de parallélisme, nous retrouvons

les équations

$$\frac{dx}{dc} = \frac{dy}{dc'} = \frac{dz}{dc''},$$

qui sont celles d'Olinde Rodrigues, d'où l'on aurait éliminé le rayon de courbure R (¹).

Nous aurons fréquemment l'occasion d'employer la représentation sphérique et nous nous contenterons, pour le moment, des remarques élémentaires qui précèdent. Avant de continuer l'étude générale des propriétés des lignes de courbure, nous indiquerons comment on peut former leur équation différentielle dans les cas très variés qui peuvent se présenter.

143. Supposons d'abord que la surface soit considérée comme lieu de points et que les coordonnées rectangulaires x, y, z soient des fonctions données de deux paramètres α, β. On pourrait employer l'équation (4); la méthode suivante conduit au résultat d'une manière plus symétrique.

Les équations de la normale au point (x, y, z) seront

$$(X - x)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial \alpha} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(X - x)\frac{\partial x}{\partial \beta} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial \beta} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

ou

$$(22) \qquad \begin{cases} X\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial r}{\partial \alpha} = 0, \\ X\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \beta} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \beta} - \dfrac{\partial r}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(23) \qquad r = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Exprimons que la normale engendre une surface développable, c'est-à-dire qu'il existe un déplacement pour lequel un point con-

(¹) *Voir* J. Bertrand, *Traite de Calcul differentiel*, pp. 665 et 697.

venablement choisi (X, Y, Z) de cette droite satisfait aux équations

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} dX + \frac{\partial y}{\partial \alpha} dY + \frac{\partial z}{\partial \alpha} dZ = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} dX + \frac{\partial y}{\partial \beta} dY + \frac{\partial z}{\partial \beta} dZ = 0.$$

Différentions les équations (22), en tenant compte des précédentes; nous aurons

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} & X\, d\frac{\partial x}{\partial \alpha} + Y\, d\frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z\, d\frac{\partial z}{\partial \alpha} - d\frac{\partial r}{\partial \alpha} = 0, \\ & X\, d\frac{\partial x}{\partial \beta} + Y\, d\frac{\partial y}{\partial \beta} + Z\, d\frac{\partial z}{\partial \beta} - d\frac{\partial r}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de X, Y, Z entre les formules (22) et (24) nous donnera l'équation différentielle des lignes de courbure sous la forme d'un déterminant

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & d\frac{\partial x}{\partial \alpha} & d\frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & d\frac{\partial y}{\partial \alpha} & d\frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & d\frac{\partial z}{\partial \alpha} & d\frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial r}{\partial \alpha} & \frac{\partial r}{\partial \beta} & d\frac{\partial r}{\partial \alpha} & d\frac{\partial r}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0;$$

et les formules (22) et (24) feront connaître le centre de courbure principal correspondant à chaque ligne de courbure.

Le résultat précédent peut être encore présenté sous la forme suivante. Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles de la forme

$$(26) \qquad A\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + B\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + C\frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + A'\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B'\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0,$$

et exprimons qu'elle admet les quatre solutions particulières x, y, z, r; nous aurons ainsi quatre équations qui détermineront les rapports mutuels de A, B, C, A', B'. L'équation linéaire pourra

même s'écrire sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} & \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de comparer cette équation au déterminant (25) pour reconnaître que l'équation différentielle des lignes de courbure, ordonnée par rapport à $d\alpha$, $d\beta$, pourra s'écrire

$$(27) \qquad A\, d\beta^2 - B\, d\alpha\, d\beta + C\, d\alpha^2 = 0,$$

A, B, C étant les coefficients qui figurent dans l'équation (26). Nous pouvons donc énoncer cette première proposition :

Lorsqu'on aura obtenu, par un procédé quelconque, l'équation aux dérivées partielles de la forme (26) *à laquelle satisfont à la fois* x, y, z *et* $x^2 + y^2 + z^2$, *l'équation différentielle des lignes de courbure sera donnée par la formule* (27). *En d'autres termes, les lignes de courbure seront les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles.*

C'est la proposition déjà obtenue par une autre voie au n° **108**.

144. Nous rattacherons au résultat qui précède le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C\theta,$$

où A, B, C *sont des fonctions quelconques de* α, β, *si l'on en connaît cinq solutions particulières liées par une équation homogène du second degré à coefficients constants, on pourra*

obtenir une surface dont on saura déterminer les lignes de courbure.

Soient, en effet, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_5$ les cinq solutions satisfaisant à la relation homogène du second degré

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = 0.$$

On pourra, en effectuant sur ces solutions une substitution linéaire à coefficients constants, ramener la relation précédente à la forme

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\theta_4\theta_5 = 0. \tag{28}$$

Faisons dans l'équation en θ la substitution

$$\theta = \sigma\theta_5;$$

σ satisfera à une équation linéaire comme θ, mais cette équation, devant admettre la solution $\sigma = 1$, sera de la forme

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial\alpha\,\partial\beta} = A_1 \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} + B_1 \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}$$

et ne contiendra plus le terme en σ. Elle admettra les solutions particulières

$$x = \frac{\theta_1}{\theta_5}, \qquad y = \frac{\theta_2}{\theta_5}, \qquad z = \frac{\theta_3}{\theta_5}, \qquad r = \frac{\theta_4}{\theta_5}, \tag{29}$$

qui sont liées par la relation

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = r.$$

Donc, en vertu de la proposition démontrée au numéro précédent, la surface lieu du point (x, y, z) admettra α et β pour paramètres de ses lignes de courbure.

145. Pour donner une application du théorème que nous venons d'établir, nous choisirons l'équation

$$2(\rho - \rho_1)\frac{\partial^2 \theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0, \tag{30}$$

qui admet la solution particulière

$$\theta = A\sqrt{(\rho - a)(\rho_1 - a)},$$

quelles que soient les constantes A, a. Nous allons prendre pour ces constantes cinq systèmes de valeurs de la manière suivante :

Posons

$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2)\ldots(u - a_5).$$

Les cinq solutions θ_i définies par la formule générale

$$(31) \qquad \theta_i = \sqrt{\frac{(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)(a_i - h)}{f'(a_i)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

satisferont à l'identité

$$\theta_1^2 + \ldots + \theta_5^2 = 0.$$

Prenons

$$x_1 = \theta_1, \qquad x_2 = \theta_2, \qquad x_3 = \theta_3,$$

$$x_4 = -\frac{R}{2}(\theta_4 - i\theta_5), \qquad x_5 = \frac{1}{R}(\theta_4 + i\theta_5),$$

R désignant une constante quelconque; les cinq solutions x_i satisferont à l'identité (28). Les formules (29) nous donneront ici

$$(32) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{R\theta_1}{\theta_4 + i\theta_5}, \qquad y = \dfrac{R\theta_2}{\theta_4 + i\theta_5}, \qquad z = \dfrac{R\theta_3}{\theta_4 + i\theta_5}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = -R^2\dfrac{\theta_4 - i\theta_5}{\theta_4 + i\theta_5}, \end{cases}$$

et définiront une surface rapportée au système de coordonnées curvilignes formé par les lignes de courbure. On peut d'ailleurs trouver l'équation de cette surface de la manière suivante :

Les équations (32) nous donnent

$$\frac{\theta_1}{x} = \frac{\theta_2}{y} = \frac{\theta_3}{z} = \frac{\theta_4}{\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R}} = \frac{\theta_5}{\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri}}.$$

D'ailleurs les fonctions θ_i satisfont encore à l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{\theta_i^2}{a_i - h} = 0;$$

en les remplaçant par les quantités qui leur sont proportionnelles,

on obtient l'équation cherchée sous la forme

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{a_1 - h} + \frac{y^2}{a_2 - h} + \frac{z^2}{a_3 - h} \\ &\qquad + \frac{\left(\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{2R}\right)^2}{a_4 - h} + \frac{\left(\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{2Ri}\right)^2}{a_5 - h} = 0. \end{aligned} \right.$$

On trouvera de même les équations qui déterminent chaque ligne de courbure. En effet, les radicaux θ_i contiennent d'une manière symétrique les trois quantités h, ρ, ρ_1; l'équation précédente devra donc être encore vérifiée quand on y remplacera h par ρ et par ρ_1. Cette remarque nous conduit immédiatement à la proposition suivante :

Si, dans l'équation (33), *on considère h comme un paramètre variable, les surfaces correspondantes à deux valeurs distinctes de h se couperont mutuellement suivant une ligne de courbure commune à ces surfaces.*

Si l'on chasse les dénominateurs dans l'équation (33), on reconnaîtra que, le coefficient de h^4 étant nul, elle est du troisième degré seulement par rapport à h; par conséquent, si l'on donne à h toutes les valeurs possibles de manière à obtenir une famille de surfaces, il y aura trois surfaces de cette famille passant par chaque point de l'espace. Ces trois surfaces, devant se couper mutuellement suivant des lignes de courbure communes, seront nécessairement orthogonales. Ainsi l'équation (33) définit un système triple orthogonal, analogue à celui qui est formé par les surfaces du second degré, et composé de trois familles représentées par la même équation. Si l'on suppose, par exemple, a_1, a_2, a_3, a_4 réels et rangés par ordre de grandeur, les trois familles correspondront aux valeurs de h comprises entre a_1 et a_2, entre a_2 et a_3, entre a_3 et a_4.

Les surfaces représentées par l'équation (33) sont du quatrième ordre et admettent pour ligne double le cercle de l'infini; elles ont reçu le nom de *cyclides*.

146. Nous indiquerons maintenant une application d'une autre nature. On sait que l'*inversion,* ou transformation par rayons

vecteurs réciproques, définie, dans le cas le plus simple, par des formules telles que les suivantes

$$(34)\quad X = \frac{K^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Y = \frac{K^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Z = \frac{K^2 z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

fait correspondre une sphère ou un plan à une sphère ou à un plan, qu'elle conserve les angles, les rapports de similitude des éléments infiniment petits. Nous allons montrer qu'elle conserve aussi les lignes de courbure.

Considérons, en effet, une surface quelconque (Σ), et soient ρ, ρ_1 les paramètres de ses lignes de courbure. Nous savons que x, y, z satisferont à une équation de la forme

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = A \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + B \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1},$$

et cette équation se distingue de toutes celles qui seraient relatives à d'autres systèmes conjugués par la propriété, déjà signalée, d'admettre aussi comme solution $x^2 + y^2 + z^2$. Ces quatre solutions de l'équation (35) s'expriment, au moyen de X, Y, Z, de la manière suivante :

$$\frac{K^2 X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \frac{K^2 Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \frac{K^2 Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \frac{K^4}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Si donc on effectue dans l'équation (35) la substitution

$$\theta = \frac{\sigma}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

l'équation en σ admettra les solutions particulières

$$X, \ Y, \ Z, \ 1,$$

et sera, par conséquent, de la forme

$$(36)\qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = A_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + B_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \rho_1}.$$

D'ailleurs l'équation (35) admettait la solution évidente $\theta = 1$ et, par conséquent, l'équation (36) admettra, en même temps que X, Y, Z, la solution

$$\sigma = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Il résulte de là que la surface lieu du point (X, Y, Z) aura ρ, ρ_1 pour paramètres de ses lignes de courbure. Ce résultat est précisément celui qu'il s'agissait d'établir.

147. On démontre d'ordinaire la proposition précédente en la rattachant au théorème de Dupin, relatif aux lignes de courbure des surfaces qui font partie d'un système triple orthogonal. Nous donnerons, en terminant ce Chapitre, une démonstration nouvelle de ce théorème.

Soient

$$(40) \qquad \rho = f(x, y, z), \qquad \rho_1 = f_1(x, y, z), \qquad \rho_2 = f_2(x, y, z)$$

les équations de trois familles de surfaces se coupant mutuellement à angle droit. Si l'on résout ces équations par rapport à x, y, z, les relations

$$(41) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_1} = 0, \\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_2} = 0, \\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} &= \frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho_2} = 0, \end{aligned} \right.$$

où nous employons le signe S de Lamé pour indiquer une somme étendue aux trois coordonnées d'un même point, devront avoir lieu identiquement. Si nous différentions la première par rapport à ρ_2, la deuxième par rapport à ρ_1, la troisième par rapport à ρ, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_2} &= 0, \\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} &= 0, \\ \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_2} + \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} &= 0 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(42) \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_2} = \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0.$$

D'après cela, on voit que l'on aura trois systèmes différents de

solutions de l'équation en u, v, w

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} u + \frac{\partial y}{\partial \rho} v + \frac{\partial z}{\partial \rho} w = 0,$$

si l'on prend, soit

$$u = \frac{\partial x}{\partial \rho_1}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial \rho_1}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial \rho_1},$$

soit

$$u = \frac{\partial x}{\partial \rho_2}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial \rho_2}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial \rho_2},$$

soit enfin

$$u = \frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \qquad v = \frac{\partial^2 y}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \qquad w = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}.$$

Ces systèmes ne pouvant être linéairement indépendants, il faut que le dernier soit une combinaison linéaire des deux premiers. c'est-à-dire que x, y, z soient des solutions particulières d'une équation de la forme

$$(43) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = m \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + n \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2}.$$

Les variables ρ_1, ρ_2 définissent donc, sur la surface (ρ), un système conjugué, et comme, par la nature de la question, ce système est orthogonal, il est nécessairement composé des lignes de courbure. On vérifie, d'ailleurs, aisément que l'équation linéaire (43) admet aussi la solution particulière

$$\theta = x^2 + y^2 + z^2.$$

148. La démonstration précédente conduit à une nouvelle méthode de recherche des systèmes orthogonaux. Nous venons de voir que les coordonnées x, y, z et la somme $x^2 + y^2 + z^2$ satisfont à l'équation (43), et il est clair que ces solutions satisfont à deux autres équations semblables en ρ, ρ_2 et ρ_1, ρ. Nous allons montrer, réciproquement, que *lorsque trois équations linéaires de la forme*

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = m \dfrac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + n \dfrac{\partial \theta}{\partial \rho_2}, \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \partial \rho_2} = m_1 \dfrac{\partial \theta}{\partial \rho_2} + n_1 \dfrac{\partial \theta}{\partial \rho}, \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho} = m_2 \dfrac{\partial \theta}{\partial \rho} + n_2 \dfrac{\partial \theta}{\partial \rho_1} \end{cases}$$

admettent trois solutions particulières x, y, z en même temps que la somme de leurs carrés $x^2+y^2+z^2$, le système de coordonnées curvilignes défini par les expressions de x, y, z en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 est nécessairement orthogonal.

Considérons, en effet, l'une des surfaces coordonnées (ρ); le système de coordonnées curvilignes (ρ_1, ρ_2), déterminé sur cette surface par les deux autres familles, est formé des lignes de courbure de cette surface; car x, y, z, considérées comme des fonctions de ρ_1, ρ_2, satisfont, en même temps que $x^2+y^2+z^2$, à la première des équations précédentes. Les surfaces des trois familles, se coupant mutuellement suivant leurs lignes de courbure, seront nécessairement orthogonales.

149. Pour ne pas traiter ce sujet d'une manière incomplète, nous remarquerons qu'on peut obtenir aisément les coefficients m, n, ... quand on connaît l'expression de l'élément linéaire

$$ds^2 = H^2\, d\rho^2 + H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2,$$

dans le système orthogonal. Si l'on différentie, en effet, par rapport à ρ_1 l'équation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = H^2,$$

on aura

$$H\frac{\partial H}{\partial \rho_1} = \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \rho_1}$$

et, en remplaçant $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \rho\, \partial \rho_1}$ par sa valeur déduite de la dernière équation (44),

$$H\frac{\partial H}{\partial \rho_1} = m_2\,\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + n_2\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \rho}\,\frac{\partial x}{\partial \rho_1} = m_2 H^2.$$

On a donc

$$m_2 = \frac{1}{H}\,\frac{\partial H}{\partial \rho_1}.$$

Si l'on substitue cette expression et les valeurs analogues de n_2, m, n, ... dans les équations (44), on les obtient sous la

forme

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2},\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_2\,\partial\rho} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2} + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho},\\ \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} &= \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1},\end{aligned}\right.$$

qui est due à Lamé.

CHAPITRE VI.

LES COORDONNÉES PENTASPHÉRIQUES.

Du système de cinq sphères orthogonales. — Relation avec une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. — Formules principales relatives aux distances et aux angles. — Emploi des coordonnées pentasphériques dans la théorie des lignes de courbure et dans celle des systèmes orthogonaux. — Inversion. = Étude du système de deux sphères. — Les six coordonnées de la sphère comparées à celles de la ligne droite. — La transformation de M. Sophus Lie.

---

150. Dans l'étude des systèmes conjugués nous avons vu que l'emploi des coordonnées homogènes et tangentielles met en évidence les propriétés projectives et dualistiques qui appartiennent à ces systèmes. Si l'on veut, de même, donner une exposition satisfaisante de la théorie analytique des lignes de courbure, on est conduit à introduire un système particulier de coordonnées auxquelles nous avons donné le nom de coordonnées *pentasphériques*. Nous nous proposons de définir, dans ce Chapitre, ce système de coordonnées et d'indiquer son rôle dans la théorie des lignes de courbure.

Considérons une sphère quelconque rapportée à des axes rectangulaires

$$K(x^2+y^2+z^2)+2Ax+2By+2Cz+D=0.$$

Son rayon ρ sera donné par la formule

$$\rho^2=\frac{A^2+B^2+C^2-DK}{K^2}.$$

La forme quadratique qui figure au numérateur joue un rôle fondamental dans la théorie de la sphère. Il est naturel de la ramener à une somme de carrés; et, dans ce but, nous écrivons l'équation de la sphère sous la forme

$$(1)\quad 2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}+i\varepsilon\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}=0.$$

Si l'on désigne par ρ le rayon et par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de cette sphère, on obtiendra les expressions suivantes de ces quantités

$$(2)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{-\alpha R}{\delta + i\varepsilon}, \quad y_0 = \dfrac{-\beta R}{\delta + i\varepsilon}, \quad z_0 = \dfrac{-\gamma R}{\delta + i\varepsilon}. \\ \rho = \dfrac{R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2}}{\delta + i\varepsilon}, \quad x_0^2+y_0^2+z_0^2-\rho^2 = -R^2\dfrac{\delta - i\varepsilon}{\delta + i\varepsilon}. \end{cases}$$

Si la sphère n'est pas réduite à un point, on pourra toujours supposer que l'on a

$$(3)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2 = 1,$$

et l'expression du rayon prendra la forme simple

$$(4)\qquad \rho = \frac{R}{\delta + i\varepsilon}.$$

Cette formule donne au rayon un signe déterminé; nous reviendrons plus loin sur ce point.

Si l'on substitue dans le premier membre de l'équation (1) les coordonnées d'un point quelconque, ce premier membre aura pour valeur

$$(5)\qquad \frac{S}{\rho},$$

S désignant la puissance du point par rapport à la sphère considérée. Remarquons une fois pour toutes que, si la sphère se réduisait à un plan, on aurait

$$\delta + i\varepsilon = 0,$$

et le premier membre de l'équation (1) deviendrait égal au double de la distance du point à ce plan.

Supposons maintenant que l'on considère, en même temps que la sphère représentée par l'équation (1), une autre sphère (S′) représentée par l'équation semblable

$$2\alpha' x + 2\beta' y + \ldots = 0.$$

Soient ρ' le rayon et x'_0, y'_0, z'_0 les coordonnées du centre de

cette seconde sphère. Les formules (2) nous donnent

$$(6)\quad \begin{cases} (x_0-x'_0)^2+(y_0-y'_0)^2+(z_0-z'_0)^2-\rho^2-\rho'^2 \\ \quad = -\dfrac{2R^2(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon')}{(\delta+i\varepsilon)(\delta'+i\varepsilon')}, \end{cases}$$

et, par suite, l'équation

$$(7)\quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'+\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon'=0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les deux sphères se coupent à angle droit. Cette condition subsiste quand l'une ou l'autre des sphères se réduit à un plan; sa forme nous permettra de donner une théorie très simple du système de cinq sphères deux à deux orthogonales.

151. Considérons, en effet, cinq sphères (S_1), (S_2), ..., (S_5) de rayons R_1, ..., R_5 et écrivons leurs équations sous la forme

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\alpha_k x+2\beta_k y+2\gamma_k z+\delta_k\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} \\ & \qquad +i\varepsilon_k\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}=0, \end{aligned} \right\} \; k=1,2,\ldots,5.$$

Nous aurons d'abord, par hypothèse,

$$(9)\quad \alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2+\delta_k^2+\varepsilon_k^2=1,$$

et de plus, les sphères étant orthogonales,

$$(10)\quad \alpha_k\alpha_{k'}+\beta_k\beta_{k'}+\gamma_k\gamma_{k'}+\delta_k\delta_{k'}+\varepsilon_k\varepsilon_{k'}=0.$$

Ces deux groupes de formules rattachent la théorie du système des sphères à celle d'une substitution linéaire orthogonale à cinq variables. Toute substitution de ce genre fournira un groupe de cinq sphères orthogonales et *vice versa*.

On sait que les relations (9) et (10) entraînent comme conséquence les suivantes

$$(11)\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_5^2=1$$

$$(12)\quad \alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_5\beta_5=0,$$

et toutes celles que l'on obtiendrait en remplaçant, d'une manière quelconque, α et β par α, β, γ, δ, ε.

On déduit de cette remarque une première propriété, fondamentale dans la théorie qui nous occupe. Désignons par S_k la puissance d'un point quelconque par rapport à la sphère (S_k); le premier membre de l'équation (8) sera $\frac{S_k}{R_k}$. Si l'on élève cette équation au carré et si l'on ajoute toutes les équations ainsi obtenues, on trouvera, en appliquant les formules (11) et (12),

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_k}{R_k}\right)^2 = \left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{Ri}\right)^2 + 4x^2+4y^2+4z^2 = 0.$$

Ainsi il existe, entre les puissances d'un point quelconque par rapport aux cinq sphères, la relation homogène

$$(13) \qquad \sum \left(\frac{S_k}{R_k}\right)^2 = 0.$$

Nous rappelons que, si une des sphères (S_k) se réduit à un plan (P_k), $\frac{S_k}{R_k}$ doit être remplacé par $2P_k$, P_k désignant la distance du point (x, y, z) à ce plan.

Si l'on multiplie de même le premier membre de l'équation (8) par $\delta_k + i\varepsilon_k$, on trouve

$$\sum (\delta_k + i\varepsilon_k)\frac{S_k}{R_k} = -2R$$

ou encore

$$(14) \qquad \sum \frac{S_k}{R_k^2} = -2,$$

en remarquant que, d'après la formule (4), on a

$$\delta_k + i\varepsilon_k = \frac{R}{R_k}.$$

152. Nous pouvons maintenant définir le système de coordonnées que nous nous proposons d'étudier. Nous appellerons *coordonnées pentasphériques* d'un point les cinq quantités x_k proportionnelles à $\frac{S_k}{R_k}$ et nous poserons

$$(15) \qquad x_k = \lambda \frac{S_k}{R_k}.$$

Comme nous n'emploierons que des équations homogènes, le facteur λ n'aura aucune influence sur les résultats. On trouvera d'ailleurs, en vertu de la formule (13),

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 0. \tag{16}$$

Ainsi nos cinq coordonnées seront toujours, comme il fallait s'y attendre, liées par une relation homogène. Il est aisé de montrer qu'il n'y a pas entre elles d'autre relation et que cinq quantités satisfaisant à l'équation (15) déterminent un point et un seul.

Remarquons en effet que les équations (13) et (14) contiennent toutes les relations possibles entre les quantités S_k; car, pour déterminer un point, trois de ces quantités peuvent être choisies arbitrairement. D'ailleurs, si l'on substitue dans ces relations l'expression de S_k en x_k, la première se réduit à l'équation (16) qui est vérifiée par hypothèse, la seconde devient

$$-2\lambda = \sum \frac{x_k}{R_k}, \tag{17}$$

et fait connaître le facteur de proportionnalité λ.

Au reste, on peut obtenir les expressions de x, y, z en fonction des variables x_k; il suffit de résoudre le système

$$\left\{ \begin{aligned} & 2\alpha_k x + 2\beta_k y + 2\gamma_k z \\ & \quad + \delta_k \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + i\varepsilon_k \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = \frac{S_k}{R_k} = \frac{x_k}{\lambda}, \end{aligned} \right. \tag{18}$$

où l'on donne à k les valeurs 1, 2, ..., 5. En ajoutant ces équations après les avoir multipliées soit par α_k, soit par β_k, γ_k, δ_k, ε_k on trouve

$$\left\{ \begin{aligned} & 2\lambda x = \sum_1^5 \alpha_k x_k, & \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2) &= R\sum_1^5 \delta_k x_k, \\ & 2\lambda y = \sum_1^5 \beta_k x_k, & \lambda(x^2+y^2+z^2+R^2) &= -iR\sum_1^5 \varepsilon_k x_k. \\ & 2\lambda z = \sum_1^5 \gamma_k x_k. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Les deux dernières équations feront connaître, par soustraction,

le facteur λ sous la forme

(20) $$2\lambda R = -\Sigma(\delta_k + i\varepsilon_k)x_k,$$

qui est équivalente à l'équation (17); les autres donneront x, y, z et même $x^2+y^2+z^2$ ([1]).

En même temps qu'un point M dont les coordonnées x, y, z et x_k sont liées par les formules (18), considérons un autre point M' dont nous désignerons les coordonnées par les mêmes lettres accentuées x', y', z' et x'_k. On trouvera sans difficulté

(21) $$\left\{\begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \\ &= -\frac{\Sigma x_k x'_k}{2\lambda\lambda'} = \frac{-2\Sigma x_k x'_k}{\sum\frac{x_k}{R_k}\sum\frac{x'_k}{R_k}}; \end{aligned}\right.$$

telle est la formule qui donne la distance de deux points. Si l'on tient compte des relations identiques entre les coordonnées, on peut lui donner la forme

(22) $$\overline{MM'}^2 = \frac{\Sigma(x_k - x'_k)^2}{\sum\frac{x_k}{R_k}\sum\frac{x'_k}{R_k}}.$$

([1]) Si l'on voulait se livrer à une étude plus détaillée, il faudrait signaler un cas d'exception. La formule (13) montre que les cinq rayons satisfont à la relation

$(20)_a$ $$\sum_1^5 \frac{1}{R_k^2} = 0;$$

si l'on cherche le point pour lequel on a

$$x_k = \frac{1}{R_k},$$

on trouvera qu'il est indéterminé et n'est assujetti qu'à une condition, celle d'être dans le plan de l'infini.

D'autre part, un point du cercle de l'infini a une infinité de coordonnées qui sont déterminées par la formule

$$x_k + \frac{h}{R_k},$$

où h est quelconque et où les x_k satisfont, en même temps qu'à l'équation (16), à la relation

$$\sum\frac{x_k}{R_k} = 0.$$

Lorsque les deux points sont infiniment voisins, on obtient l'expression suivante de l'élément linéaire :

$$(23)\qquad ds^2 = \frac{\Sigma\, dx_k^2}{\left(\sum \frac{x_k}{R_k}\right)^2}.$$

Il est inutile d'insister sur l'analogie que présentent ces deux formules avec celles qui se rapportent à la géométrie de Descartes.

153. Proposons-nous maintenant d'établir les relations d'orthogonalité dans le système des coordonnées x_i.

Quand les coordonnées sont fonctions de deux variables ρ, ρ_1 les courbes (ρ), (ρ_1) seront perpendiculaires si le coefficient de $d\rho\, d\rho_1$ est nul dans l'élément linéaire, c'est-à-dire, d'après la formule (23), dans la somme

$$\Sigma\, dx_k^2.$$

Cette condition se traduit par la relation

$$(24)\qquad \sum \frac{\partial x_k}{\partial \rho}\frac{\partial x_k}{\partial \rho_1} = 0,$$

toute semblable à celle que l'on obtient avec les coordonnées cartésiennes.

Étant données maintenant deux surfaces par les équations homogènes

$$\varphi(x_1, \ldots, x_5) = 0, \qquad \psi(x_1, \ldots, x_5) = 0,$$

cherchons la condition pour qu'elles se coupent à angle droit. Nous remarquerons d'abord les relations suivantes, qu'il est aisé de vérifier, entre les puissances d'un point par rapport aux cinq sphères orthogonales

$$(25)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial z}\right)^2 = 4(S_k + R_k^2), \\ \dfrac{\partial S_k}{\partial x}\dfrac{\partial S_{k'}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_k}{\partial y}\dfrac{\partial S_{k'}}{\partial y} + \dfrac{\partial S_k}{\partial z}\dfrac{\partial S_{k'}}{\partial z} = 2(S_k + S_{k'}). \end{cases}$$

D'après cela, remplaçons dans les équations homogènes des deux surfaces les x_i par les quantités proportionnelles $\frac{S_i}{R_i}$ et posons,

pour abréger,

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

On aura évidemment

$$(\varphi, \psi) = \sum\sum \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_{k'}}(S_k, S_{k'}),$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (25).

$$(\varphi, \psi) = 2\left(\sum S_k \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\right)\left(\sum \frac{\partial\psi}{\partial S_k}\right) + 2\left(\sum S_k \frac{\partial\psi}{\partial S_k}\right)\left(\sum \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\right) + 4\sum R_k^2 \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_k}.$$

Puisque les fonctions sont homogènes, on a

$$\sum S_k \frac{\partial\varphi}{\partial S_k} = m\varphi = 0, \qquad \sum S_k \frac{\partial\psi}{\partial S_k} = n\psi = 0,$$

et la condition d'orthogonalité prend la forme

$$(\varphi, \psi) = 4\sum R_k^2 \frac{\partial\varphi}{\partial S_k}\frac{\partial\psi}{\partial S_k} = 0$$

ou, en introduisant les quantités x_i,

$$(26) \qquad (\varphi, \psi) = 4\sum_1^5 \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = 0.$$

Plus généralement le cosinus de l'angle V, sous lequel deux surfaces se coupent et qui est donné par la formule

$$\cos V = \frac{(\varphi, \psi)}{\sqrt{(\varphi, \varphi)(\psi, \psi)}},$$

aura pour expression

$$(27) \qquad \cos V = \frac{\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}}{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2}\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)^2}}.$$

154. Avant de continuer l'étude des coordonnées x_i, nous indiquerons leur rôle dans la théorie des lignes de courbure.

Considérons une surface quelconque et supposons que les coordonnées x_i d'un point quelconque de cette surface soient exprimées en fonction de deux variables indépendantes α, β. Formons l'équation linéaire

$$(28) \qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} + D\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + E\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + F\theta = 0,$$

à laquelle satisfont les cinq coordonnées. Nous allons montrer que ses caractéristiques sont les lignes de courbure de la surface.

Si l'on pose, en effet,

$$\theta = \lambda\sigma,$$

λ étant le facteur de proportionnalité qui figure dans les formules (15) et qui est défini par l'équation (17), l'équation linéaire prendra la forme

$$A\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha\,\partial\beta} + C\frac{\partial^2\sigma}{\partial\beta^2} + D'\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} + E'\frac{\partial\sigma}{\partial\beta} = 0;$$

d'où le terme en σ a disparu, puisque λ, étant une fonction linéaire des x_i, est une solution particulière de l'équation (28). L'équation en σ, admettant les cinq solutions $\frac{x_i}{\lambda}$ ou $\frac{S_i}{R_i}$ qui sont des fonctions linéairement indépendantes de $x^2+y^2+z^2$, x, y, z, 1, devra admettre comme solutions particulières les mêmes fonctions

$$1, \quad x, \quad y, \quad z, \quad x^2+y^2+z^2.$$

Ce sera donc l'équation considérée au n° 143 et dont les caractéristiques sont les lignes de courbure. Les caractéristiques de l'équation en σ étant les mêmes que celles de l'équation en θ, notre proposition est démontrée. On en déduit immédiatement la conséquence suivante, qui revient au fond au théorème du n° 144.

Si l'on connaît cinq solutions particulières $x_1, \ldots, x_5$ d'une équation linéaire

$$(29) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C\theta,$$

liées par la relation

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

les quantités x_i sont les coordonnées pentasphériques d'un

point d'une surface pour laquelle α et β sont les paramètres des lignes de courbure.

De même le théorème relatif aux systèmes orthogonaux, donné au n° 148, recevra l'expression nouvelle qui suit :

Étant données trois équations linéaires

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho_2\,\partial\rho_1} = m\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + n\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_2} + p\theta, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_2} = m_1\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_2} + n_1\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} + p_1\theta, \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = m_2\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} + n_2\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + p_2\theta, \end{cases}$$

si l'on en connaît cinq solutions particulières x_i satisfaisant à la condition

$$\Sigma x_i^2 = 0,$$

elles pourront être regardées comme les coordonnées pentasphériques d'un point de l'espace, et ρ, ρ_1, ρ_2 seront les paramètres de trois familles de surfaces se coupant mutuellement à angle droit (¹).

Considérons en particulier les trois équations

$$(31)\quad \begin{cases} 2(\rho_1-\rho_2)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1\,\rho_2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_2} = 0, \\ 2(\rho_2-\rho)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_2} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} = 0, \\ 2(\rho-\rho_1)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho} - \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1} = 0, \end{cases}$$

qui admettent la solution commune

$$\theta = A\sqrt{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)};$$

si l'on pose

$$(32)\quad f(u) = (u-a_1)(u-a_2)\ldots(u-a_5),$$

(¹) G. Darboux, *Mémoire sur la Théorie des coordonnees curvilignes et des systèmes orthogonaux* (*Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. VII, p. 297; 1878).

les cinq solutions définies par la formule générale

$$(33) \qquad x_i = \sqrt{\frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}} \qquad (i=1, 2, \ldots, 5)$$

satisferont à l'identité

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

Les formules (33) détermineront par conséquent un système triple orthogonal. Les surfaces qui le composent et qui ont reçu le nom de *cyclides* ne sont autres que les transformées par inversion de celles qui ont été définies au n° 145; elles sont représentées par l'équation unique

$$(34) \qquad \sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0,$$

où l'on remplacera λ successivement par ρ, ρ_1, ρ_2. Au reste, on vérifie immédiatement, en appliquant la condition d'orthogonalité (26), que deux surfaces correspondantes à deux valeurs différentes de λ se coupent mutuellement à angle droit. En se servant des formules (33), on trouvera la formule

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} 4\sum dx_k^2 = {} & \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}\,d\rho^2 \\ & + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}\,d\rho_2^2, \end{aligned} \right.$$

qui permet d'obtenir l'expression de l'élément linéaire dans le système orthogonal considéré. La formule (23) nous donnera

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} M^2\,ds^2 = {} & \frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}{f(\rho)}\,d\rho^2 \\ & + \frac{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}{f(\rho_2)}\,d\rho_2^2, \end{aligned} \right.$$

M ayant pour valeur

$$(37) \qquad M = 2\sum_1^5 \frac{1}{R_k}\sqrt{\frac{(a_k-\rho)(a_k-\rho_1)(a_k-\rho_2)}{f'(a_k)}}.$$

Si l'on fait, en particulier, $\rho_2 = \text{const.}$, on obtient l'élément linéaire d'une des cyclides qui composent le système sous la

forme

$$M^2 ds^2 = (\rho - \rho_1)\left[\frac{\rho - \rho_2}{f(\rho)} d\rho^2 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{f(\rho_1)} d\rho_1^2\right].$$

On voit que les cyclides possèdent la propriété, que nous avons déjà reconnue aux surfaces du second degré (n° **121**), d'être divisibles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure. On pourra donc faire la carte d'une région quelconque tracée sur l'une de ces surfaces.

155. Dans la théorie des systèmes conjugués et des lignes asymptotiques, l'emploi des coordonnées homogènes nous a permis de reconnaître immédiatement et sans calcul que les propriétés de ces systèmes et de ces lignes subsistent quand on soumet la surface à une transformation homographique ou à une transformation par polaires réciproques. Les coordonnées homogènes d'un point quelconque ne changent pas, en effet, quand on effectue une transformation homographique quelconque, pourvu que l'on suppose cette transformation effectuée sur le tétraèdre de référence en même temps que sur les points de l'espace. Le système des coordonnées pentasphériques jouit d'une propriété analogue par rapport à l'inversion. Voici comment on peut le démontrer.

Rappelons d'abord que la théorie du contact des sphères, celle des centres et des axes de similitude, ont conduit les géomètres à considérer le rayon d'une sphère comme une quantité susceptible de signe ; de sorte que, dans beaucoup de recherches, il y a le plus grand avantage à regarder comme distinctes deux sphères de même centre, mais dont les rayons sont égaux et de signes contraires. Nous allons voir, en particulier, que, si l'on soumet une sphère quelconque à une inversion, on peut déterminer rationnellement le rayon de la sphère transformée en fonction du rayon de la sphère proposée.

Soient, en effet,

$$(38) \qquad x = \frac{k^2 X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad y = \frac{k^2 Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad z = \frac{k^2 Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

les formules qui définissent l'inversion.

Par l'application de ces formules à la transformation d'une

sphère (S), de centre $x_0 y_0 z_0$ et de rayon R, définie par l'équation

$$(39) \qquad S = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - r^2 = 0,$$

on obtient l'identité

$$(40) \quad S = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}[(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 + (Z-Z_0)^2 - R^2],$$

X_0, Y_0, Z_0 étant donnés par les formules

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} X_0 &= \frac{k^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}, \\ Y_0 &= \frac{k^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}, \\ Z_0 &= \frac{k^2 z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}, \end{aligned} \right.$$

$$R = \frac{\pm k^2 r}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}.$$

On pourra prendre un signe arbitraire dans cette dernière formule; mais, si l'on convient de prendre constamment le même signe, par exemple le signe +, les formules (41) et la suivante

$$(42) \qquad R = \frac{k^2 r}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2}$$

détermineront non seulement la position de la sphère transformée, mais encore le signe de son rayon.

Dans cette hypothèse, la formule (40) deviendra

$$\frac{S}{r} = \frac{k^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} \frac{S'}{R},$$

S' désignant la puissance du point (X, Y, Z) par rapport à la sphère transformée, et l'on peut énoncer le résultat suivant : *Si l'on divise la puissance* S *d'un point par rapport à une sphère par le rayon r de cette sphère, et que l'on soumette la figure entière à une inversion, le quotient* $\frac{S}{r}$ *se reproduira multiplié par une quantité qui ne dépend pas de la sphère et ne contient que les coordonnées du point.*

En particulier, les cinq quantités $\frac{S_i}{R_i}$ se reproduisent toutes

multipliées par le même nombre et, comme les coordonnées x_i leur sont proportionnelles, on peut dire que ces coordonnées demeurent invariables, le facteur de proportionnalité étant seul changé, pourvu que l'on rapporte la nouvelle figure aux sphères orthogonales qui dérivent des sphères primitives par l'inversion considérée. On voit ainsi que toutes les propriétés établies pour une figure et indépendantes du choix des sphères coordonnées subsisteront nécessairement pour toutes les figures inverses de la figure considérée.

Cette proposition étant admise, le théorème du n° **154** montre immédiatement que l'inversion conservera les lignes de courbure de la surface.

156. Nous terminerons en indiquant les formules principales relatives à la sphère. L'équation (21) qui donne la distance de deux points nous permet d'écrire immédiatement l'équation d'une sphère dont le rayon est ρ et dont le centre a pour coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$, sous la forme

$$2\sum \alpha_k x_k + \rho^2 \sum \frac{\alpha_k}{R_k} \sum \frac{x_k}{R_k} = 0. \tag{43}$$

Cette équation est linéaire par rapport aux coordonnées x_i. Réciproquement, toute équation de la forme

$$\sum_1^5 m_k x_k = 0 \tag{44}$$

représente une sphère ou un plan. Il suffit, pour le reconnaître, de remplacer les x_k par leurs expressions (18) en x, y, z. Pour obtenir le centre et le rayon de cette sphère, il faudra identifier les équations (43) et (44). On a ainsi les équations

$$\mu m_k = 2\alpha_k + \frac{\rho^2}{R_k} \sum \frac{\alpha_k}{R_k} \qquad (k = 1, \ldots, 5), \tag{45}$$

où μ désigne le facteur de proportionnalité.

Comme on peut multiplier les α_k par un nombre quelconque, on peut remplacer le facteur μ par un nombre arbitrairement choisi; nous ferons, par exemple,

$$\mu = 2.$$

Multiplions l'équation (45) par $\frac{1}{R_k}$ et ajoutons les équations correspondantes aux diverses valeurs de l'indice k. En tenant compte de la relation

$$\sum \frac{1}{R_k^2} = 0,$$

déjà signalée dans la note de la page 218, nous aurons

$$\sum \frac{\alpha_k}{R_k} = \sum \frac{m_k}{R_k}.$$

D'autre part, si nous ajoutons encore les équations (45) après avoir élevé leurs deux membres au carré, nous trouverons

$$\sum_1^5 m_k^2 = \rho^2 \left(\sum \frac{\alpha_k}{R_k} \right)^2.$$

Le rapprochement des deux formules précédentes nous donnera

$$(46) \qquad \rho = \frac{\sqrt{\Sigma m_k^2}}{\sum \frac{m_k}{R_k}},$$

et, en portant cette valeur de ρ dans l'équation (45), nous aurons

$$(47) \qquad \alpha_k = m_k - \frac{1}{2 R_k} \frac{\Sigma m_k^2}{\sum \frac{m_k}{R_k}}.$$

Telle est la formule qui fera connaître les coordonnées pentasphériques du centre.

Une sphère est complètement déterminée si l'on connaît les rapports des cinq quantités m_k que, pour cette raison, on peut appeler les *coordonnées homogènes de la sphère*. Mais, dans toutes les questions où le signe du rayon entre en considération, il est nécessaire d'introduire une coordonnée nouvelle propre à faire connaître la valeur du radical qui figure dans l'expression du rayon. Nous poserons, en désignant par m_6 cette sixième coordonnée,

$$(48) \qquad i m_6 = \sqrt{\sum_1^5 m_k^2},$$

afin que la relation entre les six coordonnées prenne la forme très symétrique

$$(49)\qquad \sum_1^6 m_k^2 = 0.$$

Deux sphères de même centre et de rayons égaux et de signes contraires auront les mêmes coordonnées $m_1, \ldots, m_5$; mais les coordonnées m_6 seront égales et de signes contraires. On aura, d'après la formule (46),

$$(50)\qquad \rho = \frac{im_6}{\sum_1^5 \frac{m_k}{R_k}}.$$

Cela posé, considérons deux sphères (S), (S′), de coordonnées m_k, m'_k respectivement, et soient d la distance de leurs centres, ρ, ρ' leurs rayons. Les formules (21) et (47) nous permettent de calculer d et nous donnent

$$(51)\qquad d^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{-2\sum_1^5 m_k m'_k}{\sum_1^5 \frac{m_k}{R_k} \sum_1^5 \frac{m'_k}{R_k}}.$$

Si donc nous voulons calculer l'angle V des deux sphères, en le définissant d'une manière précise par la relation

$$(52)\qquad d^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos V,$$

nous aurons, en appliquant les formules (50), (51),

$$(53)\qquad \cos V = -\frac{\sum_1^5 m_k m'_k}{m_6 m'_6}$$

et, par conséquent,

$$(54)\qquad 2\sin^2\frac{V}{2} = \frac{\sum_1^6 m_k m'_k}{m_6 m'_6}.$$

Ces formules vont nous conduire à plusieurs conséquences et, en

particulier, à la définition géométrique des coordonnées de la sphère.

Supposons que la sphère (S′) se réduise à la sphère coordonnée (S_k), on aura

$$m'_1 = 0, \quad \ldots, \quad m'_k = 1, \quad \ldots, \quad m'_5 = 0,$$

et la formule (50), où l'on fera $\rho = R_k$, nous donnera

$$m'_6 = -i;$$

l'équation (53) deviendra donc

$$m_k = i m_6 \cos V_k,$$

V_k désignant l'angle de la sphère (S) avec la sphère (S_k).

Ainsi, les cinq coordonnées $m_1, \ldots, m_5$ d'une sphère quelconque sont proportionnelles aux cosinus des angles de cette sphère avec les sphères coordonnées. De plus, la relation entre les six coordonnées prendra la forme

$$\sum_1^5 \cos^2 V_k = 1,$$

tout à fait analogue à celle qui relie les angles d'un plan avec les trois plans coordonnés dans la Géométrie de Descartes. La formule (53) pourra s'écrire aussi sous la forme

$$(55) \qquad \cos V = \sum_1^5 \cos V_k \cos V'_k,$$

et son analogie avec celle qui donne le cosinus de l'angle de deux plans est également évidente.

La formule (54), si l'on tient compte de la relation identique entre les coordonnées, peut s'écrire

$$(56) \qquad 4 \sin^2 \frac{V}{2} = \frac{-\sum_1^6 (m_k - m'_k)^2}{m_6 m'_6}.$$

Si l'on suppose que les deux sphères sont infiniment voisines

leur angle dv sera donc fourni par la relation

$$(57)\qquad dv^2 = \frac{-\sum_1^6 dm_k^2}{m_6^2},$$

Toutes les fois que deux sphères sont tangentes, elles se coupent sous l'angle zéro ou π; mais, dans les théories où l'on tient compte du signe du rayon, il y a avantage à considérer comme tangentes seulement celles qui se coupent sous l'angle zéro. Ainsi entendue, la condition de contact s'exprime par la relation

$$(58)\qquad \sum_1^6 (m_k - m'_k)^2 = -2\sum_1^6 m_k m'_k = 0.$$

Quand les deux sphères sont infiniment voisines, la distinction relative au signe du rayon disparaît et la condition de contact devient

$$(59)\qquad \sum_1^6 dm_k^2 = 0.$$

157. La forme de la condition de contact conduit à un rapprochement capital entre la géométrie des sphères et celle des lignes droites. Reprenons les équations de la ligne droite, écrites sous la forme déjà employée au n° 139

$$(60)\qquad \begin{cases} qz - ry + p_1 = 0, \\ rx - pz + q_1 = 0, \\ py - qx + r_1 = 0. \end{cases}$$

Les six coordonnées homogènes de la ligne droite satisferont, nous l'avons vu, à l'équation identique

$$(61)\qquad pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0,$$

et réciproquement (n° 139) six quantités satisfaisant à cette relation définiront toujours une ligne droite. L'équation (61) est quadratique, comme la relation (49) entre les six coordonnées de la sphère, et l'on peut ramener ces relations l'une à l'autre en posant

$$(62)\qquad \begin{cases} p = m_1 + im_2, & q = m_3 + im_4, & r = m_5 + im_6, \\ p_1 = m_1 - im_2, & q_1 = m_3 - im_4, & r_1 = m_5 - im_6, \end{cases}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(63)\quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{p+p_1}{2}, & m_3 = \dfrac{q+q_1}{2}, & m_5 = \dfrac{r+r_1}{2}, \\ m_2 = i\dfrac{p_1-p}{2}, & m_4 = i\dfrac{q_1-q}{2}, & m_6 = i\dfrac{r_1-r}{2}. \end{cases}$$

Les formules (62) ou (63), qui conduisent à l'identité

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = \sum_1^6 m_k^2,$$

font correspondre à toute droite une sphère et *vice versa*. De plus, si l'on considère deux sphères, de coordonnées m_k, m'_k respectivement, et les deux droites correspondantes, de coordonnées p, q, r, ...; p', q', r', ..., il résulte de l'identité précédente et de la forme linéaire des équations de correspondance l'identité plus générale

$$(64)\quad \begin{cases} (p-p')(p_1-p'_1) \\ \quad +(q-q')(q_1-q'_1)+(r-r')(r_1-r'_1) = \displaystyle\sum_1^6 (m_k-m'_k)^2. \end{cases}$$

Le second membre de cette formule s'annule quand les deux sphères sont tangentes et seulement dans ce cas; le premier membre s'annule quand les deux droites considérées se coupent. On voit donc que la transformation définie par les formules (62) ou (63) fait correspondre à deux sphères tangentes deux droites qui se coupent et *vice versa*.

Au reste, on peut définir cette transformation sans passer par les coordonnées homogènes qui ont été l'objet de nos études dans ce Chapitre; car, si l'on prend les équations d'une droite sous la forme

$$(65)\quad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

la condition pour que deux droites différentes se coupent s'exprime par la relation bien connue

$$(a-a')(q-q') - (b-b')(p-p') = 0;$$

et, si l'on pose

$$(66)\qquad \begin{cases} a = x + y i, & b = z + \mathrm{R}, \\ q = x - y i, & p = \mathrm{R} - z \end{cases}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} a' &= x' + y' i, & b' &= z' + \mathrm{R}', \\ q' &= x' - y' i, & p' &= \mathrm{R}' - z', \end{aligned}$$

elle devient

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2 = 0.$$

Si donc on considère les formules (66) comme établissant une correspondance entre la droite arbitraire représentée par les équations (65), et la sphère dont le rayon serait R et dont le centre aurait pour coordonnées cartésiennes x, y, z, on voit que ces formules font correspondre à deux droites qui se coupent deux sphères qui se touchent, et réciproquement.

Cette transformation, qui établit une liaison entre les lignes droites et les sphères, c'est-à-dire entre les éléments les plus essentiels de l'espace, est une des plus belles découvertes de la Géométrie moderne; elle est due à M. Sophus Lie qui, dans un Mémoire inséré au tome V des *Mathematische Annalen* (¹), l'a présentée avec ses plus importantes conséquences. Au nombre de ces conséquences, il faut surtout citer la suivante :

La transformation de M. Lie fait correspondre à l'ensemble des droites tangentes à une surface (S) *l'ensemble des sphères tangentes à une autre surface* (S'). *A toutes les droites tangentes en un point* M *de* (S) *correspondent toutes les sphères tangentes en un point* M' *de* (S'). *Quand le point* M *décrit une ligne asymptotique de* (S), *le point* M' *décrit une ligne de courbure de* (S'). *Par suite, à toute surface dont on sait déterminer les lignes asymptotiques, on peut faire correspondre par la transformation de M. Lie une autre surface dont on connaîtra les lignes de courbure et* vice versa.

(¹) Sophus Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel- Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (*Mathematische Annalen,* t. V, p. 145-256; 1871).

Nous avons étudié ce théorème avec tous les détails nécessaires dans notre Cours de 1881-82, qui avait pour objet la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles. Nous y serons conduit plus loin par une voie indirecte; mais, pour l'établir avec toute la largeur désirable, nous serions obligé de développer ici une théorie du contact qui nous éloignerait de notre objet et que nous réserverons pour une autre occasion.

CHAPITRE VII.

LES LIGNES DE COURBURE EN COORDONNÉES TANGENTIELLES.

Cas où la surface est définie par son équation tangentielle. — Application à la surface de quatrième classe, normale à toutes les positions d'une droite invariable dont trois points décrivent trois plans rectangulaires. — Cas où les coordonnées tangentielles sont exprimées en fonction de deux paramètres. — Première solution du problème ayant pour objet la détermination des surfaces admettant une représentation sphérique donnée pour leurs lignes de courbure. — Développements sur un système particulier de coordonnées tangentielles employé par M. O. Bonnet dans l'étude des surfaces.

158. Nous allons passer maintenant à l'examen du cas dans lequel la surface est définie par une propriété de ses plans tangents et nous supposerons d'abord que l'on connaisse l'équation homogène qui relie les coordonnées du plan tangent

$$f(u, v, w, p) = 0, \tag{1}$$

les axes étant rectangulaires. Le point de contact du plan tangent aura pour coordonnées

$$x = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}, \quad y = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}, \quad z = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial w}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}, \tag{2}$$

et les cosinus directeurs de la normale seront proportionnels à u, v, w. Pour obtenir l'équation différentielle des lignes de courbure, il suffira donc d'appliquer l'équation (4) du n° **138**, ce qui donnera

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial p}\, d\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial f}{\partial u}\, d\dfrac{\partial f}{\partial p} & u & du \\ \dfrac{\partial f}{\partial p}\, d\dfrac{\partial f}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\, d\dfrac{\partial f}{\partial p} & v & dv \\ \dfrac{\partial f}{\partial p}\, d\dfrac{\partial f}{\partial w} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\, d\dfrac{\partial f}{\partial p} & w & dw \end{vmatrix} = 0$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & d\frac{\partial f}{\partial u} & u & du \\ \frac{\partial f}{\partial v} & d\frac{\partial f}{\partial v} & v & dv \\ \frac{\partial f}{\partial w} & d\frac{\partial f}{\partial w} & w & dw \\ \frac{\partial f}{\partial p} & d\frac{\partial f}{\partial p} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il importe de remarquer, en vue des applications, que l'équation précédente conserve encore sa forme, alors même que l'équation (1) n'est pas homogène, pourvu que l'on suppose u, v, w égaux aux cosinus directeurs de la normale et liés par l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Pour le démontrer, supposons que l'équation (1) ne soit pas homogène. On peut toujours la rendre homogène et de degré zéro, par exemple en divisant u, v, w, p par la quantité

$$h = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

qui est égale à l'unité. Alors il faudra mettre, à la place de $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ dans l'équation (3),

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{u}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{v}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{w}{h}$$

ce qui équivaut à ajouter aux deux premières colonnes du déterminant (3) les deux dernières multipliées par des coefficients convenablement choisis, et ne change pas la valeur du déterminant.

159. Considérons, par exemple, la surface de quatrième classe définie par l'équation

$$(4)\qquad p = \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2},$$

où u, v, w sont les cosinus directeurs de la normale; p désigne donc la distance de l'origine au plan tangent. En rendant, pour un instant, l'équation homogène et appliquant les formules (2), on trouvera, pour les coordonnées du point de contact du plan tan-

gent, les valeurs

$$(5) \qquad x = (p-a)u, \qquad y = (p-b)v, \qquad z = (p-c)w$$

et, pour celles d'un point de la normale situé à la distance λ du pied de cette normale,

$$(6) \quad X = (p+\lambda-a)u, \qquad Y = (p+\lambda-b)v, \qquad Z = (p+\lambda-c)w.$$

Les points où la normale coupe les trois plans coordonnés correspondent aux valeurs

$$(7) \qquad \lambda = a-p, \qquad \lambda = b-p, \qquad \lambda = c-p,$$

dont les différences sont constantes. On a donc déjà cette élégante proposition :

Lorsque trois points d'une droite invariable décrivent trois plans rectangulaires et que, par conséquent, tous les autres points décrivent des ellipsoïdes, la droite demeure constamment normale à une famille de surfaces parallèles représentées par une équation de la forme

$$(8) \qquad p = \frac{(a+k)u^2 + (b+k)v^2 + (c+k)w^2}{2},$$

où k désigne la constante qui varie quand on passe d'une surface à la surface parallèle (¹).

On peut d'ailleurs obtenir très aisément une construction par points de ces surfaces. Cherchons le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la normale. La valeur λ correspondante à ce point sera déterminée par l'équation

$$uX + vY + wZ = 0,$$

qui donne, en appliquant les formules (6),

$$\lambda = p.$$

Soient P ce point, M le point où la normale coupe le plan des

(¹) G. Darboux, *Sur une nouvelle définition de la surface des ondes* (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 446; 1881).

yz et qui correspond, nous l'avons vu, à la valeur $\lambda = a - p$. Le milieu du segment PM correspond évidemment à une valeur de λ qui est la demi-somme des valeurs précédentes et, par suite, égale à $\frac{a}{2}$. Cette valeur étant constante, le milieu du segment décrira une surface parallèle à la proposée. Ainsi, *si l'on considère toutes les positions de la droite invariable mobile, le milieu du segment formé par le point où cette droite coupe l'un des plans coordonnés et par le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite décrit l'une des surfaces normales à la droite dans ses diverses positions* [1].

Proposons-nous maintenant de déterminer les lignes de courbure. L'équation (3) prend ici la forme

$$\begin{vmatrix} u & du & a\,du \\ v & dv & b\,dv \\ w & dw & c\,dw \end{vmatrix} = 0,$$

et son intégrale, que l'on trouvera aisément, est définie par l'équation

$$\frac{u^2}{a-\rho} + \frac{v^2}{b-\rho} + \frac{w^2}{c-\rho} = 0,$$

où ρ désigne la constante arbitraire. Ce résultat s'interprète comme il suit :

La représentation sphérique des deux familles de lignes de courbure de la surface est donnée par un système d'ellipses sphériques homofocales [2].

160. Supposons maintenant qu'étant donnée une surface quelconque, on connaisse les expressions des coordonnées tangentielles en fonction de deux paramètres α, β. Les coordonnées du point de

---

(1) Dans un article inséré au *Bulletin des Sciences mathematiques* (2e série, t. IX, p. 137, 1885), M. Mannheim a retrouvé tous ces résultats par des considérations de pure Géométrie.

(2) Nous ne voulons pas insister sur cette étude particulière, et nous nous contenterons d'énoncer ici les deux propositions suivantes :

contact du plan tangent satisferont (n° 96) aux trois équations

$$(9)\quad \begin{cases} ux + vy + wz + p = 0, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + y\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} + z\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial \beta} + y\dfrac{\partial v}{\partial \beta} + z\dfrac{\partial w}{\partial \beta} + \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Considérons l'ellipsoïde (E) *défini par l'équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

La transformation homographique définie par les formules

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{ma+n}} = \dfrac{X}{m\sqrt{a}}, \\ \dfrac{y}{\sqrt{mb+n}} = \dfrac{Y}{m\sqrt{b}}, \\ \dfrac{z}{\sqrt{mc+n}} = \dfrac{Z}{m\sqrt{c}}, \end{cases}$$

où m et n désignent deux constantes quelconques, fait correspondre aux normales de (E) *celles de l'ellipsoïde* (E_1) *ayant pour équation*

$$\frac{X^2}{ma+n} + \frac{Y^2}{mb+n} + \frac{Z^2}{mc+n} = 1;$$

si l'on pose

$$n = m^2k^2,$$

et si, laissant k^2 fixe, on fait croître m indéfiniment, l'ellipsoïde (E_1) *se transforme en une sphère de très grand rayon, et ses normales deviennent les droites invariables dont trois points décrivent les plans de symétrie de* (E). *Ces droites dérivent des normales de* (E) *par la transformation homographique*

$$x = \frac{kX}{\sqrt{a}}, \qquad y = \frac{kY}{\sqrt{b}}, \qquad z = \frac{kZ}{\sqrt{c}},$$

qui est comprise comme cas limite dans la première (α), *et s'en déduit lorsqu'on y introduit les hypothèses faites sur m et sur n.*

La surface étudiée dans le texte peut donc être considérée comme une surface parallèle à un ellipsoïde dont les axes ont grandi indéfiniment.

Si une surface quelconque jouit de la propriété qu'il existe une transformation homographique, transformant ses normales dans les normales d'une autre surface et conservant le plan de l'infini, les lignes de courbure de cette surface peuvent toujours être déterminées et admettent pour représentation sphérique un système d'ellipses homofocales.

Un point situé sur la normale à la distance λ de son pied aura pour coordonnées

$$(10)\qquad X = x + \frac{u\lambda}{h}, \qquad Y = y + \frac{v\lambda}{h}, \qquad Z = z + \frac{w\lambda}{h},$$

h désignant le radical

$$(11)\qquad h = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Remplaçons, dans les équations (9), x, y, z par leurs expressions tirées des formules (10); les équations ainsi obtenues

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &uX + vY + wZ + p = h\lambda, \\ &X\frac{\partial u}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial v}{\partial \alpha} + Z\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \lambda\frac{\partial h}{\partial \alpha}, \\ &X\frac{\partial u}{\partial \beta} + Y\frac{\partial v}{\partial \beta} + Z\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta} = \lambda\frac{\partial h}{\partial \beta} \end{aligned}\right.$$

définiront le point considéré de la normale. Pour trouver l'équation différentielle des lignes de courbure, nous écrirons encore qu'il existe un déplacement pour lequel le point correspondant à une valeur convenablement choisie de λ décrit une courbe tangente à la normale, c'est-à-dire pour lequel on a

$$(13)\qquad \frac{dX}{u} = \frac{dY}{v} = \frac{dZ}{w} = d\theta,$$

$d\theta$ étant introduit pour l'homogénéité.

Si l'on différentie dans cette hypothèse les formules (12), la première donnera

$$u\,dX + v\,dY + w\,dZ + X\,du + Y\,dv + Z\,dw + dp = \lambda\,dh + h\,d\lambda,$$

ou, en tenant compte des deux suivantes et des formules (13),

$$(14)\qquad h^2\,d\theta = h\,d\lambda, \qquad d\lambda = h\,d\theta;$$

la différentiation des deux dernières formules (12) nous conduira alors aux deux équations

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &X\,d\frac{\partial u}{\partial \alpha} + Y\,d\frac{\partial v}{\partial \alpha} + Z\,d\frac{\partial w}{\partial \alpha} + d\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \lambda\,d\frac{\partial h}{\partial \alpha}, \\ &X\,d\frac{\partial u}{\partial \beta} + Y\,d\frac{\partial v}{\partial \beta} + Z\,d\frac{\partial w}{\partial \beta} + d\frac{\partial p}{\partial \beta} = \lambda\,d\frac{\partial h}{\partial \beta}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, l'élimination de X, Y, Z, λ entre les équations (12) et (15) nous donnera l'équation cherchée sous forme de déterminant

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} u & \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} & d\frac{\partial u}{\partial \alpha} & d\frac{\partial u}{\partial \beta} \\ v & \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \cdots & \cdots & \cdots \\ w & \frac{\partial w}{\partial \alpha} & \cdots & \cdots & \cdots \\ p & \frac{\partial p}{\partial \alpha} & \cdots & \cdots & \cdots \\ h & \frac{\partial h}{\partial \alpha} & \frac{\partial h}{\partial \beta} & d\frac{\partial h}{\partial \alpha} & d\frac{\partial h}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

161. Cette équation différentielle offre la plus grande analogie avec celle que nous avons formée (n° **143**) pour les coordonnées ponctuelles et la répétition des raisonnements employés aux n^{os} **143**, **144** nous conduit aux propositions suivantes :

Formons l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(17)\qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} + D\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + E\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + F\theta = 0,$$

qui admet comme solutions particulières les cinq fonctions u, v, w, p, h de α et de β. Lorsqu'on l'aura obtenue d'une manière quelconque, les caractéristiques de cette équation, définies par l'équation différentielle

$$(18)\qquad A\,d\beta^2 - B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\alpha^2 = 0,$$

seront les lignes de courbure de la surface; par suite, si les coefficients A *et* C *sont nuls, α et β seront les paramètres des lignes de courbure.*

Cette proposition générale entraîne comme conséquence le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$(19)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = A'\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + B'\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + C'\theta,$$

où A′, B′, C′ *sont des fonctions quelconques de α et β, si l'on*

en connaît quatre solutions particulières u, v, w, h, liées par la relation

$$(20) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = h^2,$$

la surface enveloppe du plan

$$uX + vY + wZ + \theta = 0,$$

où θ *désigne une solution quelconque de l'équation* (19), *sera rapportée au système de coordonnées curvilignes* (α, β) *formé par ses lignes de courbure.*

En effet, l'équation linéaire de la forme (17), à laquelle satisferont alors les cinq quantités u, v, w, p, h relatives à cette surface, sera l'équation (19) et, par conséquent, α et β seront les paramètres des lignes de courbure.

Nous avons montré (n° 98) que, lorsqu'on a obtenu sur une surface un système conjugué quelconque, les coordonnées tangentielles u, v, w, p, considérées comme fonctions des paramètres α et β des deux familles conjuguées, doivent satisfaire à une équation linéaire de la forme (19). L'équation linéaire relative au système conjugué formé par les lignes de courbure se distingue, on le voit, de toutes les autres par la propriété d'admettre en outre la solution

$$h = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

162. Les théorèmes précédents permettent de former, d'une manière très simple, l'équation aux dérivées partielles dont dépend la recherche des surfaces qui admettent pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure deux familles de courbes orthogonales choisies arbitrairement sur la sphère de rayon 1.

Soient en effet u, v, w, h les coordonnées homogènes d'un point de la sphère, qui seront liées par l'équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = h^2,$$

et que nous supposerons exprimées en fonction des paramètres α, β des deux familles orthogonales. Un système orthogonal tracé sur la sphère étant, par cela même, un système conjugué, u, v, w, h

satisferont à une équation de la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C\theta = 0,$$

équation qu'il sera facile d'obtenir d'une manière explicite, puisqu'on en connaît les quatre solutions particulières u, v, w, h. Cela posé, le plan tangent de la surface, étant parallèle au plan tangent correspondant de la sphère, sera représenté par une équation de la forme

$$uX + vY + wZ + p = 0,$$

où p devra satisfaire à la même équation linéaire que u, v, w, c'est-à-dire à l'équation (21). Il suffira donc, pour résoudre le problème, d'intégrer l'équation (21), et chaque solution particulière de cette équation donnera une solution particulière du problème posé.

Supposons, par exemple, que l'on se propose de déterminer les surfaces admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un système d'ellipses sphériques homofocales; ρ, ρ_1 désignant les paramètres de ces ellipses, on aura ici

$$u^2 = \frac{(a-\rho)(a-\rho_1)}{(a-b)(a-c)}, \quad v^2 = \frac{(b-\rho)(b-\rho_1)}{(b-a)(b-c)}, \quad w^2 = \frac{(c-\rho)(c-\rho_1)}{(c-a)(c-b)}$$

L'équation à laquelle satisfont u, v, w sera la suivante

$$(22) \qquad 2(\rho-\rho_1)\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} + \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = 0,$$

et il suffira d'intégrer cette équation pour obtenir la solution complète du problème proposé.

La surface étudiée au n° 159 correspond à la solution

$$\theta = \rho + \rho_1.$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur le problème général dont nous venons d'indiquer une solution.

163. Au lieu de poursuivre ces applications particulières, nous allons montrer comment on détermine les rayons principaux et les lignes de courbure quand on adopte un système spécial de coor-

données tangentielles qui a été, avec plusieurs autres systèmes très dignes d'intérêt, employé par M. O. Bonnet, dans le beau *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. V, p. 153-266; 1860). Voici comment on est conduit à choisir les variables considérées par l'éminent géomètre.

Lorsqu'on étudie la représentation sphérique, il est naturel de rechercher la définition géométrique des courbes de la surface qui admettent pour représentation sphérique les différentes génératrices rectilignes de la sphère. Soit d l'une de ces génératrices coupant le cercle de l'infini en un point μ. La courbe qui lui correspond sur la surface sera évidemment le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à d; en d'autres termes, ce sera la courbe de contact du cône de sommet μ circonscrit à la surface.

Ces courbes de contact des cônes circonscrits dont le sommet se trouve sur le cercle de l'infini jouissent, relativement aux lignes de courbure, d'une propriété importante que nous allons signaler. D'abord il en passe deux par chaque point M de la surface; car soient A et B les points où le plan tangent en M coupe le cercle de l'infini : les cônes circonscrits de sommets A et B toucheront la surface suivant deux courbes passant en M. Les deux tangentes à ces courbes de contact auront pour conjuguées les génératrices de ces deux cônes, c'est-à-dire les deux droites de longueur nulle du plan tangent, MA, MB. Or ces deux droites MA, MB sont placées symétriquement par rapport à deux tangentes perpendiculaires quelconques et, en particulier, par rapport aux directions des lignes de courbure. Il en sera donc de même de leurs conjuguées qui sont les tangentes aux deux courbes de contact. De là le théorème suivant :

Les courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur le cercle de l'infini déterminent sur la surface un système de coordonnées curvilignes admettant pour image sphérique le système des génératrices rectilignes de la sphère. Les tangentes aux deux courbes coordonnées qui passent en un point quelconque de la surface admettent pour bissectrices les directions des lignes de courbure.

Par conséquent, si l'on emploie le système de coordonnées que nous venons de définir, l'équation des lignes de courbure pourra être ramenée à la forme simple

$$A\,d\alpha^2 + C\,d\beta^2 = 0$$

et ne contiendra plus le terme en $d\alpha\,d\beta$.

164. Voici comment on vérifie cet important résultat. Désignons toujours par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en un point M de la surface; c, c', c'' seront les coordonnées du point m qui sert de représentation sphérique à M.

Les expressions de ces coordonnées en fonction des paramètres α, β des génératrices rectilignes de la sphère ont déjà été données (n° **15**). Elles sont

$$(23)\qquad c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta},\qquad c' = i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta},\qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Nous écrirons l'équation du plan tangent sous la forme

$$cx + c'y + c''z + \frac{\xi}{\alpha-\beta} = 0$$

ou plus simplement

$$(24)\qquad (1-\alpha\beta)x + i(1+\alpha\beta)y + (\alpha+\beta)z + \xi = 0.$$

On aura donc ici

$$u = 1-\alpha\beta,\qquad v = i(1+\alpha\beta),\qquad w = \alpha+\beta,\qquad p = \xi.$$

L'application des formules (9) nous donne d'abord les coordonnées du point de contact. On trouve ainsi

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} x - iy &= \frac{q-p}{\alpha-\beta},\\ x + iy &= \frac{\alpha^2 p - \beta^2 q}{\alpha-\beta} - \xi,\\ z &= \frac{\beta q - \alpha p}{\alpha-\beta},\end{aligned}\right.$$

p et q désignant les dérivées premières de ξ. En appelant de même r, s, t les dérivées secondes, l'équation (16) des lignes de courbure

devient ici

$$(26)\qquad dp\,d\alpha - dq\,d\beta = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0,$$

et les formules générales (12) et (15), qui font connaître le centre principal et le rayon de courbure correspondant, nous donnent

$$(27)\qquad 2R = (s+\sqrt{rt})(\alpha-\beta)+p-q,$$

$$(28)\qquad \begin{cases} X - iY = s+\sqrt{rt}, \\ 2Z = (\alpha+\beta)(s+\sqrt{rt})-p-q, \\ X+iY = -\alpha\beta(s+\sqrt{rt})+\alpha p+\beta q-\xi, \end{cases}$$

X, Y, Z, R désignant les coordonnées du centre et le rayon de courbure. Dans toutes ces formules, on a pris pour $\frac{d\beta}{d\alpha}$ la valeur $\sqrt{\frac{r}{t}}$, en sorte que $\sqrt{rt}$ est mis à la place de

$$t\frac{d\beta}{d\alpha} = r\frac{d\alpha}{d\beta}.$$

165. Les formules précédentes se prêtent à une foule d'applications intéressantes, tant à cause de leur simplicité que du choix des variables auxquelles elles se rapportent. On peut leur donner une autre forme qui offre quelques avantages dans certaines recherches.

Nous avons pris pour les cosinus directeurs de la normale les expressions (23). Les variables α, β possèdent ce grand avantage de se transformer par la même substitution linéaire quand on effectue, soit un changement d'axes, soit un déplacement de la surface. Mais, dans certaines applications où il s'agit de surfaces réelles à déterminer, les variables complexes α et β offrent un inconvénient résultant de ce qu'elles ne sont pas imaginaires conjuguées. Nous avons vu que, pour tout point réel, α a pour conjuguée $-\frac{1}{\beta}$. Nous changerons donc, dans les formules (23), β en $-\frac{1}{\beta}$, ce qui donnera pour les cosinus directeurs les expressions suivantes, déjà employées au n° 31,

$$(29)\qquad c = \frac{\beta+\alpha}{1+\alpha\beta},\qquad c' = i\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta},\qquad c'' = \frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha\beta},$$

et nous prendrons pour l'équation du plan tangent

$$(30)\qquad (\alpha+\beta)x + i(\beta-\alpha)y + (\alpha\beta-1)z + \xi = 0;$$

ξ sera maintenant une variable réelle et α, β des variables imaginaires conjuguées toutes les fois que la surface sera réelle, et qu'il s'agira de plans tangents réels.

Les coordonnées du point de contact du plan tangent auront maintenant pour expressions

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{1+\alpha\beta},\\ x - iy &= -\frac{\beta(\xi - p\alpha - q\beta)}{1+\alpha\beta} - p,\\ x + iy &= -\frac{\alpha(\xi - p\alpha - q\beta)}{1+\alpha\beta} - q. \end{aligned}\right.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure sera

$$(32)\qquad dp\,d\alpha - dq\,d\beta = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0,$$

comme dans le cas précédent.

Et enfin les formules faisant connaître le centre et le rayon de courbure deviendront

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} 2R &= \xi - p\alpha - q\beta + (1+\alpha\beta)(s+\sqrt{rt}),\\ 2Z &= \xi - p\alpha - q\beta - (1-\alpha\beta)(s+\sqrt{rt}),\\ X - iY &= -p + \beta(s+\sqrt{rt}),\\ X + iY &= -q + \alpha(s+\sqrt{rt}). \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement qu'elles fourniront pour X, Y, Z, R des expressions essentiellement réelles.

On passera d'ailleurs du premier système de formules au second en faisant la substitution très simple

$$(34)\qquad \beta = -\frac{1}{\beta'},\qquad \xi = \frac{\xi'}{\beta'}.$$

Enfin on obtiendra également sans difficulté l'équation différentielle des lignes asymptotiques, qui est ici

$$(35)\quad (1+\alpha\beta)(r\,d\alpha^2 + 2s\,d\alpha\,d\beta + t\,d\beta^2) + 2\,d\alpha\,d\beta(\xi - p\alpha - q\beta) = 0,$$

et l'expression de l'élément linéaire

$$ds^2 = (\alpha\, d\alpha + dq)(\alpha\, d\beta + dp), \tag{36}$$

qui se présente ainsi décomposé en ses deux facteurs.

166. Il ne sera pas inutile d'examiner, en vue des applications ultérieures, ce que deviennent les coordonnées α, β, ξ quand on change les axes coordonnés ou, ce qui est la même chose, quand on déplace la surface. Considérons d'abord le système primitif dans lequel l'équation du plan tangent est

$$(1-\alpha\beta)X + i(1+\alpha\beta)Y + (\alpha+\beta)Z + \xi = 0.$$

Quand on imprimera à la surface une translation de composantes λ, μ, ν, il faudra, dans l'équation précédente, remplacer X, Y, Z par $X-\lambda$, $Y-\mu$, $Z-\nu$; la nouvelle valeur ξ' de ξ sera donc

$$\xi' = \xi - \lambda(1-\alpha\beta) - i\mu(1+\alpha\beta) - (\alpha+\beta)\nu. \tag{37}$$

Imaginons maintenant que l'on fasse tourner la surface autour de l'origine des coordonnées. Si nous remarquons que, d'après leur définition, α et β sont les coordonnées symétriques du point m qui, sur la sphère de rayon 1, sert de représentation sphérique au plan tangent, il résultera des propositions développées (Livre I, Chap. III) que les nouvelles valeurs α_1, β_1 des coordonnées α, β s'obtiendront par une même substitution linéaire effectuée sur α et sur β. On aura

$$\alpha = \frac{m\alpha_1 + n}{p\alpha_1 + q}, \qquad \beta = \frac{m\beta_1 + n}{p\beta_1 + q}. \tag{38}$$

Désignons par ξ_1 la nouvelle valeur de ξ. La distance de l'origine au plan tangent n'ayant pas changé, on aura

$$\frac{\xi_1}{\alpha_1 - \beta_1} = \frac{\xi}{\alpha - \beta} \tag{39}$$

ou, en remplaçant α, β par leurs valeurs

$$\xi = \frac{\xi_1(mq - np)}{(p\alpha_1 + q)(p\beta_1 + q)}. \tag{40}$$

La question proposée est donc complètement résolue, en ce qui concerne le premier système de coordonnées.

167. En reprenant la même méthode pour le second, dans lequel le plan tangent a pour équation

$$X(\alpha+\beta)+iY(\beta-\alpha)+Z(\alpha\beta-1)+\xi=0,$$

ou en passant du premier système au second par la substitution (34), on verra qu'une translation (λ, μ, ν) de la surface donne la nouvelle valeur de ξ

$$(41)\qquad \xi_1=\xi-\lambda(\alpha+\beta)-i\mu(\beta-\alpha)-\nu(\alpha\beta-1).$$

Et de même une rotation autour de l'origine des coordonnées sera définie par les formules

$$(42)\qquad \alpha=\frac{m\alpha_1+n}{p\alpha_1+q},\qquad \beta=\frac{p-q\beta_1}{n\beta_1-m},$$

$$(43)\qquad \xi=\frac{\xi_1(mq-np)}{(m-n\beta_1)(p\alpha_1+q)},$$

α_1, β_1, ξ_1 désignant les nouvelles coordonnées. Si la rotation est réelle, on pourra prendre (n° 29)

$$q=m_0,\qquad p=-n_0,$$

m_0, n_0 désignant les imaginaires conjuguées de m et de n. Les équations précédentes donneront alors

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha=\frac{m\alpha_1+n}{-n_0\alpha_1+m_0},\qquad \beta=\frac{m_0\beta_1+n_0}{-n\beta_1+m},\\ &\xi=\xi_1\frac{mm_0+nn_0}{(m-n\beta_1)(m_0-n_0\alpha_1)}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules nous seront utiles dans la théorie des surfaces minima.

CHAPITRE VIII.

APPLICATIONS DIVERSES.

Applications des formules relatives aux lignes de courbure données dans le Chapitre précédent. — Transformation de M. Lie dans laquelle les lignes de courbure d'une surface correspondent aux lignes asymptotiques de la transformée. — Transformation par directions réciproques. — Relations entre les éléments correspondants dans cette transformation. — De l'inversion dans le système de coordonnées (α, β, ξ).

---

168. Nous aurons à faire différentes applications des systèmes de formules développés dans le Chapitre précédent. Dès à présent, nous allons étudier les suivantes, et, comme il s'agit de recherches générales, nous emploierons de préférence le premier système de formules étudié dans les nos 164 et 166.

Remarquons d'abord que l'équation différentielle (26) [p. 245] des lignes de courbure est identique à l'équation différentielle des lignes asymptotiques donnée au n° 110. De là ce premier résultat :

A toute surface dont on connaît les lignes asymptotiques on peut faire correspondre une surface dont on saura déterminer les lignes de courbure et vice versa (1).

---

(1) Le rapprochement des formules données aux nos 110 et 164 nous conduit au résultat suivant : Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point de la surface dont on connaît les lignes asymptotiques, et par p et q les dérivées de z considérées comme fonction de x et de y ; soient X, Y, Z, P, Q les quantités analogues relatives à la surface transformée dont les lignes de courbure correspondent aux lignes asymptotiques de la première. On aura

$$X + iY = -z - x\frac{px + qy}{q - x}, \qquad P = \frac{qx - 1}{x + q},$$

$$X - iY = \frac{p + y}{q - x}, \qquad Q = -i\frac{1 + qx}{x + q},$$

$$Z = \frac{px + qy}{q - x}.$$

La théorie des transformations de contact permet d'ailleurs de déduire toutes

Nous avons déjà signalé (n° 157) cette belle proposition due à M. Lie; nous nous contenterons de remarquer ici que dans l'équation (30) [p. 140] des lignes asymptotiques, α et β désignent des quantités réelles pour tout point réel de la surface, tandis que, dans celle des lignes de courbure, α et β sont des variables complexes, même pour un point réel; par conséquent la correspondance définie par la proposition précédente ne saurait exister entre les éléments réels de deux surfaces réelles.

169. Envisageons maintenant l'équation différentielle des lignes de courbure

$$dp\,d\alpha - dq\,d\beta = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0; \tag{1}$$

elle possède de nombreuses propriétés qui donnent toutes naissance à des théorèmes de Géométrie.

D'abord elle ne change pas de forme si l'on remplace ξ par la nouvelle variable

$$\xi' = \xi + A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D, \tag{2}$$

A, B, C, D désignant des constantes quelconques.

Proposons-nous de définir géométriquement cette transformation.

On peut évidemment l'obtenir par la composition des deux suivantes :

$$\xi' = \xi + A(\alpha + \beta) + C\alpha\beta + D,$$
$$\xi' = \xi + h(\alpha - \beta).$$

La première équivaut, on le reconnaît aisément, à une translation de l'origine des coordonnées : la seconde remplace la surface par une surface parallèle menée à la distance h de la première. On sait en effet que, sur deux surfaces parallèles, les lignes de courbure se correspondent. Ainsi la première propriété qui se présente à nous de l'équation différentielle des lignes de courbure

---

ces formules des relations

$$X + iY = -z - xZ, \qquad x(X - iY) = Z - y,$$

qui contiennent seulement les coordonnées des points correspondants.

n'est que la traduction analytique d'une proposition géométrique importante, mais très connue.

170. Le déplacement le plus général de la surface proposée se traduirait par une substitution linéaire quelconque effectuée sur α et sur β. Cela nous conduit à la proposition générale suivante que l'on vérifiera sans difficulté :

L'équation différentielle (1) *conserve encore sa forme si l'on substitue à* α, β, ξ *les variables* α', β', ξ' *définies par l'une ou l'autre des substitutions*

$$(3)\quad \alpha = \frac{A\alpha' + B}{C\alpha' + D}, \qquad \beta = \frac{A_1\beta' + B_1}{C_1\beta' + D_1}, \qquad \xi' = H\xi(C\alpha' + D)(C_1\beta' + D_1),$$

$$(4)\quad \alpha = \frac{A\beta' + B}{C\beta' + D}, \qquad \beta = \frac{A_1\alpha' + B_1}{C_1\alpha' + D_1}, \qquad \xi' = H\xi(C\beta' + D)(C_1\alpha' + D_1),$$

où A, A_1, ..., H *désignent des constantes quelconques.*

Par conséquent les formules (3) ou (4) font connaître une transformation de surfaces qui conserve les lignes de courbure. Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer que cette transformation, quand elle est réelle, peut toujours être obtenue par l'emploi combiné d'un déplacement, d'une transformation homothétique et de la suivante qui, au premier abord, pourrait paraître trop particulière.

k désignant une constante quelconque, prenons

$$(5)\qquad \alpha' = \frac{1+k}{1-k}\beta, \qquad \beta' = \frac{1-k}{1+k}\alpha, \qquad \xi' = \xi.$$

Ces formules font correspondre au plan (P) défini par l'équation

$$(1 - \alpha\beta)X + i(1 + \alpha\beta)Y + (\alpha + \beta)Z + \xi = 0$$

un autre plan (P') ayant pour équation

$$(1 - \alpha\beta)X + i(1 + \alpha\beta)Y + \left[\frac{1+k}{1-k}\beta + \frac{1-k}{1+k}\alpha\right]Z + \xi = 0.$$

Nous voyons déjà que deux plans correspondants se coupent dans un plan fixe, le plan des xy. Voici comment on achèvera de définir la transformation.

Associons au plan (P) de la première figure le point m dont les coordonnées sont les cosinus directeurs de la normale au plan

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c' = i\,\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Ce point se trouve sur la sphère de rayon 1 et, si le plan (P) enveloppe une surface (Σ), il est la représentation sphérique du point de contact de (P) et de (Σ).

Associons de même au plan (P′) le point m' dont les coordonnées sont

$$\frac{1-\alpha'\beta'}{\alpha'-\beta'}, \qquad i\,\frac{1+\alpha'\beta'}{\alpha'-\beta'}, \qquad \frac{\alpha'+\beta'}{\alpha'-\beta'},$$

et dont la relation à (P′) est la même que celle de m à (P). Les formules (5) expriment, on le vérifie sans difficulté, que les points m, m' sont en ligne droite avec un point fixe situé à la distance k sur l'axe des z. De là résulte la définition géométrique complète de la transformation.

Soient (Σ), (Σ') *deux surfaces correspondantes. Les plans tangents aux points correspondants se coupent dans un plan fixe* (Π). *Les images sphériques des points correspondants sur la sphère de rayon* 1, *placée d'une manière quelconque dans l'espace, sont inverses l'une de l'autre par rapport à un point fixe* A, *situé sur le diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan* (Π).

Cette proposition permet évidemment de construire les plans tangents de (Σ') quand on connaît ceux de (Σ). En ce qui concerne les points de contact, nous ajouterons la remarque suivante que l'on pourra vérifier, mais qui résultera aussi des propositions établies plus loin :

La droite qui joint les deux points de contact correspondants est parallèle à celle qui relie les images sphériques de ces deux points.

Les relations que nous venons d'indiquer entre les éléments correspondants sont évidemment réciproques et, par conséquent, la transformation est *involutive*. Cette propriété la rapproche de

l'inversion; M. Laguerre, qui l'a étudiée d'une manière détaillée, lui a donné, pour cette raison, le nom de *transformation par directions réciproques* [1] que nous adopterons dans la suite. Mais la construction précédente donne lieu à une autre remarque essentielle; la transformation n'est pas *univoque* et elle fait, en général, correspondre à une surface (Σ) deux surfaces (Σ'), ou plutôt deux nappes différentes d'une même surface. En effet, si l'on considère une région de la surface (Σ) pour laquelle le sens de la normale soit parfaitement défini, chaque point de cette région aura une représentation sphérique, complètement déterminée par le sens de la normale; et la construction indiquée plus haut fera connaître, sans ambiguïté, le plan tangent de la surface correspondante; mais cette construction donnera évidemment des éléments différents si l'on change le sens de la normale en tous les points de (Σ). C'est ce que démontrent, du reste, les formules suivantes, équivalentes aux relations (5).

Soient

$$ux + vy + wz + p = 0,$$
$$u'x + v'y + w'z + p' = 0$$

les équations de deux plans correspondants; désignons, pour abréger, par h et par h' les radicaux

$$\pm\sqrt{u^2+v^2+w^2}, \quad \pm\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}.$$

Si nous posons

$$u = 1-\alpha\beta, \quad v = i(1+\alpha\beta), \quad w = \alpha+\beta, \quad p = \xi, \quad h = \alpha-\beta,$$
$$u' = 1-\alpha'\beta', \quad v' = i(1+\alpha'\beta'), \quad w' = \alpha'+\beta', \quad p' = \xi', \quad h' = \alpha'-\beta'$$

les formules (5) nous donneront

$$(6)\qquad \begin{cases} u' = u, & w'+h' = \dfrac{1+k}{1-k}(w-h), \\ v' = v, & w'-h' = \dfrac{1-k}{1+k}(w+h). \\ p' = p, \end{cases}$$

La présence du radical h montre bien qu'à un plan donné

---

[1] LAGUERRE, *Sur la transformation par directions réciproques* (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 71; 1881).

correspondent deux plans différents, qu'il sera impossible de séparer analytiquement tant que la variable h ne sera pas un carré parfait.

171. Puisque la transformation précédente conserve les lignes de courbure, elle fera correspondre nécessairement une sphère à une sphère. On vérifie cette proposition de la manière suivante.

L'équation tangentielle d'une sphère dont le rayon est R et dont le centre a pour coordonnées x, y, z est

$$ux + vy + wz + p = \mathrm{R}h, \tag{7}$$

h ayant la signification déjà donnée; car cette équation exprime que la distance du centre au plan tangent est constante. Pour obtenir la surface correspondante, effectuons la substitution définie par les formules (6). Nous obtiendrons l'équation

$$\begin{aligned} u'x + v'y + \left[\frac{1+k}{1-k}(w'-h') + \frac{1-k}{1+k}(w'+h')\right]\frac{z}{2} + p \\ = \frac{\mathrm{R}}{2}\left[\frac{1+k}{1-k}(w'-h') - \frac{1-k}{1+k}(w'+h')\right] \end{aligned}$$

ou, en ordonnant et effaçant les accents,

$$ux + vy + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}z - \frac{2k\mathrm{R}}{1-k^2}\right)w = h\left(\frac{2kz}{1-k^2} - \frac{1+k^2}{1-k^2}\mathrm{R}\right).$$

Cette équation, de même forme que l'équation (7), représente une sphère dont le centre (x', y', z') et le rayon R' sont définis par les formules

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x, & z' &= \frac{1+k^2}{1-k^2}z - \frac{2k\mathrm{R}}{1-k^2}, \\ y' &= y, & \mathrm{R}' &= \frac{2kz}{1-k^2} - \frac{1+k^2}{1-k^2}\mathrm{R}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

qui donnent aussi

$$\left\{\begin{aligned} z' + \mathrm{R}' &= \frac{1+k}{1-k}(z - \mathrm{R}), \\ z' - \mathrm{R}' &= \frac{1-k}{1+k}(z + \mathrm{R}) \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et, par conséquent,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - \mathrm{R}'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \mathrm{R}^2.$$

Il suit de là qu'à une sphère (S) de la première figure, représentée par l'équation ponctuelle

$$X^2+Y^2+Z^2-2xX-2yY-2zZ+x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$

correspond une sphère (S′) de la seconde, ayant pour équation

$$X^2+Y^2+Z^2-2xX-2yY-2\left[\frac{z(1+k^2)-2kR}{1-k^2}\right]Z+x^2+y^2+z^2-R^2=0.$$

On voit que les deux sphères (S) et (S′) coupent le plan des xy, c'est-à-dire le plan (Π) de la transformation, suivant un même cercle.

Appelons V, V′ les angles, définis par les formules

$$\cos V=\frac{z}{R},\qquad \cos V'=\frac{z'}{R'},$$

que font les deux sphères avec le plan (Π). Les formules (9) nous donnent entre ces angles la relation

$$\frac{1+\cos V'}{1-\cos V'}=\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2\frac{1-\cos V}{1+\cos V},$$

que l'on peut ramener à la forme simple

$$\tang\frac{V}{2}\tang\frac{V'}{2}=\frac{1-k}{1+k}. \tag{10}$$

Supposons que l'un des deux angles soit constant, il en sera de même de l'autre; de là résulte un moyen nouveau de déterminer la surface (Σ′) correspondante à une surface (Σ) : *On construira les sphères* (S) *tangentes à* (Σ) *et coupant le plan* (Π) *sous un angle constant* α. *Par l'intersection de chaque sphère* (S) *et du plan* (Π) *on fera passer une sphère* (S′) *coupant* (Π) *sous un angle donné* β. *L'enveloppe des sphères* (S′) *donnera la surface* (Σ′) *correspondante à* (Σ).

Une sphère de rayon nul doit être considérée comme coupant un plan ou une sphère quelconque sous un angle *infini*. La construction précédente contient donc la suivante comme cas particulier :

On construira les sphères (S) *tangentes à* (Σ) *et coupant le*

plan (Π) *sous un angle constant* α_1 (1). *Les sphères de rayon nul passant par l'intersection de chaque sphère* (S) *et du plan* (Π) *décriront une surface* (Σ') *correspondante à* (Σ) *avec conservation des lignes de courbure.*

Bien antérieurement aux études récentes sur les transformations qui conservent les lignes de courbure, et à une époque où l'on ne connaissait, parmi ces transformations, que l'inversion et la *dilatation* par laquelle on passe d'une surface à la surface parallèle, M. O. Bonnet avait fait connaître une transformation qui est comprise dans la précédente et qui correspond au cas particulier où l'angle α_1 est droit (2).

Mais on peut, si l'on emploie les sphères, obtenir une construction géométrique encore plus simple de la transformation. Les formules (9) nous montrent en effet qu'une sphère coïncidera avec sa transformée, toutes les fois que l'on aura

$$z + R = \frac{1+k}{1-k}(z - R)$$

ou

$$\frac{z}{R} = \frac{1}{k}. \tag{11}$$

Daprès cela, *si l'on considère toutes les sphères* (S) *tangentes à une surface* (Σ) *et coupant le plan* (Π) *sous un angle constant, de cosinus égal à* $\frac{1}{k}$, *elles envelopperont, en même temps que* (Σ), *la surface* (Σ') *homologue de* (Σ) *dans la transformation considérée* (3).

---

(1) Pour obtenir l'angle α_1, il suffit de faire, dans la formule (10), $\tang\frac{V'}{2} = \pm i$. On a ainsi

$$\tang\frac{\alpha_1}{2} = \pm i\frac{k-1}{k+1}.$$

(2) O. Bonnet, *Note sur un genre particulier de surfaces réciproques* (*Comptes rendus*, t. XLII, p. 485; 1856).

(3) Si la constante k est plus petite que l'unité, les sphères (S) ne coupent pas le plan (Π); mais le rapport $\frac{z}{R}$ est toujours constant. C'est dans cette hypothèse qu'est tracée la *fig.* 12.

172. La dernière proposition que nous venons d'énoncer permet de donner une définition géométrique simple de la transformation plus générale que l'on obtient si l'on soumet une figure et sa transformée à une même inversion. A toutes les sphères qui coupaient le plan (Π) sous un angle constant, l'inversion fait en effet correspondre des sphères ou des plans coupant une sphère fixe (S) sous un angle égal et constant. Ainsi :

Si l'on construit toutes les sphères tangentes à une surface (A) *et coupant une sphère fixe* (S) *sous un angle constant, elles envelopperont, en même temps que* (A), *une surface* (A′) *qui correspondra à* (A) *avec conservation des lignes de courbure.*

Si la sphère (S) se réduit à un plan (Π), on retrouve la transformation par directions réciproques.

Il ne sera pas inutile de démontrer la proposition précédente d'une manière tout à fait élémentaire. Nous examinerons en premier lieu le cas où l'angle constant est droit.

Considérons toutes les sphères (U), qui ont leur centre sur une surface (Σ) et qui coupent à angle droit une sphère (S) de rayon R. Le centre O de (S) ayant la puissance constante R^2 par rapport à toutes les sphères (U), les axes radicaux de trois sphères quelconques (U), et par suite la corde de contact de chaque sphère avec son enveloppe, viendront passer par le point O. De là résulte la construction suivante de l'enveloppe :

Les deux points de contact de la sphère (U) *de centre* M *avec son enveloppe se trouvent à l'intersection de cette sphère et de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de* (S) *sur le plan tangent en* M *à la surface lieu des centres* (Σ).

Soient μ, μ' ces deux points placés symétriquement par rapport au plan tangent de (Σ). On aura évidemment

$$\overline{O\mu}.\overline{O\mu'} = R^2,$$

R désignant le rayon de (S), et, par conséquent, les deux nappes de l'enveloppe seront inverses l'une de l'autre par rapport au point O.

M. Moutard a donné le nom d'*anallagmatiques* [1] aux surfaces qui ne changent pas quand on les soumet à une inversion déterminée. Les deux nappes de l'enveloppe précédente constituent donc une surface qui est anallagmatique par rapport au pôle O, et, réciproquement, il serait aisé de le montrer, toute surface anallagmatique peut être obtenue par la génération précédente. D'ailleurs, comme les deux nappes de l'enveloppe sont inverses l'une de l'autre, les lignes de courbure tracées sur ces deux nappes se correspondent une à une.

Étudions maintenant le cas général où les sphères variables (U) coupent la sphère fixe (S) sous un angle constant qui n'est pas droit. Nous commencerons par établir le lemme suivant :

Si des sphères variables (U) *coupent une sphère fixe* (S) *sous un angle constant, différent de zéro et de* π, *on peut toujours, en ajoutant une constante à tous leurs rayons, les transformer en des sphères* (U′) *qui coupent à angle droit une sphère fixe* (S′) *concentrique à* (S).

Soient, en effet, ρ et R les rayons des sphères (U) et (S); d la distance de leurs centres; α l'angle constant sous lequel elles se coupent; on aura

$$d^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\alpha,$$

ou encore

$$d^2 = (\rho - R\cos\alpha)^2 + R^2 \sin^2\alpha.$$

Par suite, si l'on ajoute la quantité constante $-R\cos\alpha$ au rayon ρ de (U), ce qui donnera une sphère concentrique (U′), cette sphère (U′) coupera à angle droit la sphère fixe (S′) concentrique à (S) et de rayon $R\sin\alpha$.

Ce lemme étant établi, si nous envisageons toutes les sphères (U) qui dépendent de deux paramètres et coupent (S) sous un angle donné, elles envelopperont une surface à deux nappes (A),

---

(1) MOUTARD, *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 306; 1864).

Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre (même Recueil, t. III, p. 536; 1864).

Lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 243; 1864).

(A′). Les sphères concentriques (U′), qui coupent à angle droit la sphère (S′), envelopperont une surface à deux nappes (B), (B′) respectivement parallèles à (A), (A′); et, comme les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes (B), (B′), qui sont inverses l'une de l'autre par rapport au centre commun des sphères fixes (S), (S′), il en sera de même en ce qui concerne les deux nappes (A) et (A′). La proposition que nous avions en vue se trouve ainsi établie dans toute sa généralité.

Soumettons la figure précédente à une inversion dont le pôle soit sur la sphère (S). Cette sphère se transformera en un plan (Π); les deux nappes (A), (A′) se transformeront en deux nappes (C), (C′), qui seront l'enveloppe commune d'une famille de sphères (U″) transformées des sphères (U) et coupant par conséquent le plan (Π) sous un angle constant. En d'autres termes, les nappes (C) et (C′) se déduiront l'une de l'autre au moyen de la transformation par directions réciproques la plus générale. Or on peut passer de (C) à (C′) en effectuant les transformations suivantes : 1° une inversion qui transforme (C) en (A); 2° une dilatation qui transforme (A) en (B); 3° une inversion qui transforme (B) en (B′); 4° une dilatation qui transforme (B′) en (A′); 5° une inversion finale qui transforme (A′) en (C′). Ce résultat est conforme à une proposition générale de M. Lie [1] d'après laquelle toutes les

---

[1] Dans le Mémoire déjà cité, inséré au t. V des *Mathematische Annalen*, M. Lie a fait connaître toutes les transformations de contact qui conservent les lignes de courbure; il a même signalé (p. 186) le cas particulier de la transformation par directions réciproques; mais cette transformation avait été déjà donnée dans différents travaux de M. Ribaucour. *Voir*, en particulier, RIBAUCOUR, *Note sur la déformation des surfaces* (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 332; 1870).

Sous une forme différente, elle a été l'objet des études de l'auteur publiées dans les Notes V et IX du *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, 1873.

Les transformations générales considérées par M. Lie dans son Mémoire peuvent être définies d'une manière élégante si l'on emploie les six coordonnées de la sphère reliées par l'équation

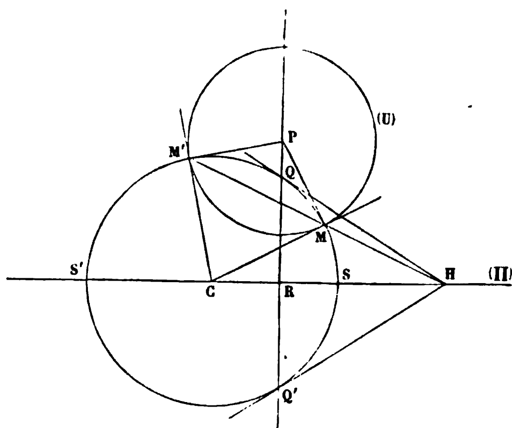
$$\sum_{1}^{6} m_i^2 = 0$$

et définies au n° 156. Il suffit, pour les obtenir, de faire correspondre à une sphère de coordonnées m_i la nouvelle sphère dont les coordonnées m'_i se déduisent des précédentes par une substitution linéaire orthogonale à coefficients constants.

transformations de contact qui conservent les lignes de courbure se ramènent à des inversions et à des dilatations.

173. Revenons aux résultats que nous avons obtenus relativement à deux sphères qui se correspondent dans la transformation par directions réciproques. Ils vont nous permettre de compléter les constructions précédentes et de faire connaître de nouvelles relations entre les éléments correspondants.

Fig. 12.



Considérons dans la première figure une surface (Σ) et prenons pour plan du tableau (*fig.* 12) le plan mené par un point quelconque M de cette surface perpendiculaire à la fois au plan (Π) de la transformation et au plan tangent en M à (Σ). Soit MC la trace de ce dernier plan; si nous construisons la sphère (U) tangente en M à (Σ) et coupant le plan (Π) sous un angle constant dont le cosinus soit $\frac{1}{k}$, nous savons qu'elle enveloppe, en même temps que (Σ), la surface (Σ') qui correspond à (Σ). Soit M′ le point de contact avec (Σ'); le plan tangent en M′ à (Σ') et le plan tangent en M à (Σ) devant couper le plan (Π) suivant la même droite, le point M′ sera dans le plan du tableau et on l'obtiendra en menant du point C, où la droite MC rencontre le plan (Π), la seconde tangente au cercle suivant lequel la sphère (U) coupe le plan du tableau. Il suit de là que le cercle décrit du point C comme

centre avec CM pour rayon passera par le point M′ et coupera normalement les surfaces (Σ), (Σ′) en M et en M′. Ainsi, *si l'on construit tous les cercles normaux à la fois à* (Σ) *et au plan* (Π), *la surface* (Σ′) *coupera tous ces cercles à angle droit.*

D'ailleurs, comme les deux plans tangents CM, CM′ se correspondent dans la transformation, on pourra leur appliquer la formule (10) établie pour deux sphères correspondantes quelconques et, si l'on désigne par V, V′ les angles de ces deux plans avec le plan (Π), on aura

$$\operatorname{tang}\frac{V}{2}\operatorname{tang}\frac{V'}{2} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Si l'on tient compte du sens des normales aux deux plans, on aura

$$V = \widehat{MCS}, \qquad V' = \widehat{M'CS} \pm \pi$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang}\frac{\widehat{M'CS}}{2} = \frac{k+1}{k-1}\operatorname{tang}\frac{\widehat{MCS}}{2}.$$

Cette équation qui définit le point M′, quand on connaît le point M, exprime que le rapport anharmonique formé sur le cercle par les quatre points M′, M, S, S′ est constant et égal à $\frac{k+1}{k-1}$. On obtient donc le théorème suivant, qui est dû à M. Ribaucour et qui est compris comme cas particulier dans une proposition générale sur laquelle nous aurons à revenir :

Étant donnée une surface (Σ), *on construit tous les cercles normaux à la fois à la surface et à un plan fixe* (Π). *Ces cercles sont normaux à une famille de surfaces* (Σ′) *qui sont définies de la manière suivante : Pour chacune d'elles, le rapport anharmonique du point où elle coupe chaque cercle normal à* (Σ) *et des trois autres points où ce même cercle est coupé par* (Σ) *et par* (Π) *est un nombre constant. Les surfaces* (Σ′) *sont celles qui dérivent de* (Σ) *dans les différentes transformations par directions réciproques qui admettent le même plan* (Π).

On peut signaler encore d'autres relations géométriques. Si, du

centre P de la sphère qui enveloppe à la fois (Σ) et (Σ') on abaisse une perpendiculaire PR sur le plan (Π), elle coupe le cercle en un point Q qui décrit une surface normale au cercle, comme il est aisé de le démontrer. En effet, la tangente en Q et la ligne MM′ coupant l'axe SS′ en un même point H, on a, en vertu d'une proposition de Géométrie élémentaire,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\widehat{QCS}}{2} = \operatorname{tang} \frac{\widehat{MCS}}{2} \operatorname{tang} \frac{\widehat{M'CS}}{2}$$

ou, en tenant compte de la formule donnée plus haut,

$$\operatorname{tang} \frac{\widehat{QCS}}{2} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{tang} \frac{\widehat{MCS}}{2};$$

le rapport anharmonique des points Q, M, S, S′ étant constant en vertu de cette équation, la surface décrite par le point Q est bien normale au cercle et elle correspond à (Σ) avec conservation des lignes de courbure. On a d'ailleurs

$$\overline{MP}^2 = MQ \times MQ' = \overline{PR}^2 - \overline{RQ}^2$$

ou, en remarquant que MP, PR sont liés par l'équation (11),

$$RQ = PR\sqrt{1-k^2};$$

on obtiendra donc la surface lieu du point Q, en réduisant dans le rapport de $\sqrt{1-k^2}$ à 1 les ordonnées perpendiculaires au plan (Π) de la surface lieu du point P. De là le théorème suivant :

Si l'on considère toutes les sphères (U) *dont les centres décrivent une surface* (S) *et qui coupent un plan* (Π) *sous un angle constant, de cosinus égal à* $\frac{1}{k}$, *elles enveloppent une surface à deux nappes* (Σ), (Σ') *dont les lignes de courbure correspondent point par point à celles de la surface* (S′) *obtenue en réduisant, dans le rapport de* $\sqrt{1-k^2}$ *à* 1, *les ordonnées de* (S) *perpendiculaires au plan* (Π).

Si, par exemple, la surface (S) est du second degré, ce théorème permettra de déterminer immédiatement les lignes de courbure

des deux nappes (Σ), (Σ'); elles correspondront, en effet, aux lignes de courbure de la surface (S') qui sera ici du second degré.

174. Nous allons maintenant chercher ce que deviennent les formules relatives à la transformation par rayons vecteurs réciproques, quand on emploie le système de coordonnées (α, β, ξ).

Soient

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{k^2}{x^2+y^2+z^2}$$

les formules de la transformation. Au plan

$$uX + vY + wZ + p = 0 \tag{12}$$

correspondra la sphère

$$ux + vy + wz + \frac{p}{k^2}(x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Cherchons l'équation tangentielle de cette sphère, c'est-à-dire la condition pour que le plan

$$u'x + v'y + w'z + p' = 0$$

lui soit tangent; l'application des méthodes élémentaires nous conduit à l'équation cherchée

$$-\frac{2pp'}{k^2} + uu' + vv' + ww' \pm \sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2} = 0.$$

Introduisons les coordonnées ξ, α, β à la place de u, v, w, p et ξ', α', β' à la place de u', v', w', p'. L'équation précédente prendra la forme

$$\frac{2\xi\xi'}{k^2} + 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta' - (\alpha+\beta)(\alpha'+\beta') \pm (\alpha-\beta)(\alpha'-\beta') = 0.$$

En prenant successivement le signe $+$ et le signe $-$, nous aurons les deux équations

$$\xi\xi' = -k^2(\alpha-\alpha')(\beta-\beta'), \tag{13}$$

$$\xi\xi' = -k^2(\beta-\alpha')(\alpha-\beta'), \tag{14}$$

qui réalisent, en quelque sorte, le dédoublement de l'inversion.

Ces formules se ramènent l'une à l'autre quand on échange α et β : et cet échange ne modifie en rien l'équation d'un plan dans le système (α, β, ξ); nous pourrons donc nous borner à considérer une seule des deux équations. Nous choisirons la formule (13).

Quand le plan défini par l'équation (12) enveloppe une surface (Σ), ξ est une fonction donnée de α et de β, et la sphère définie par l'équation (13) en α', β', ξ' enveloppe la surface (Σ') correspondante à (Σ). Pour avoir le point ou plutôt le plan de contact de cette sphère avec son enveloppe, il faut appliquer les principes généraux de la théorie des enveloppes et joindre à l'équation (13) ses deux dérivées par rapport à α et à β, ξ étant considérée comme une fonction de α et de β. En appelant p et q les dérivées premières de ξ, on trouve ainsi le système

$$(15)\qquad \begin{cases} \xi\xi' = -k^2(\alpha-\alpha')(\beta-\beta'), \\ p\xi' = -k^2(\beta-\beta'), \\ q\xi' = -k^2(\alpha-\alpha'), \end{cases}$$

qui détermine α', β', ξ' en fonction de α et de β.

Si l'on différentie maintenant la première équation (15), en tenant compte des deux autres, on trouve

$$\xi\, d\xi' = k^2(\beta-\beta')\, d\alpha' + k^2(\alpha-\alpha')\, d\beta'.$$

On aura donc, en désignant par p', q' les dérivées de ξ' par rapport à α', β',

$$(16)\qquad \begin{cases} \xi p' = k^2(\beta-\beta'). \\ \xi q' = k^2(\alpha-\alpha'). \end{cases}$$

Les formules (15), (16) définissent toutes les relations entre les éléments correspondants des deux surfaces. Elles fournissent le tableau suivant :

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi' = -\dfrac{k^2\xi}{pq}, & p' = \dfrac{k^2}{q}, & \dfrac{\xi'}{p'} = -\dfrac{\xi}{p}, \\ \alpha' = \alpha - \dfrac{\xi}{p}, & q' = \dfrac{k^2}{p}, & \dfrac{\xi'}{q'} = -\dfrac{\xi}{q}; \\ \beta' = \beta - \dfrac{\xi}{q}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par un calcul facile,

$$dp'\,d\alpha' - dq'\,d\beta' = -\frac{k^2}{pq}(dp\,d\alpha - dq\,d\beta).$$

Cette équation établit de nouveau que l'inversion conserve les lignes de courbure.

Il importe d'établir nettement ce qui distingue, au point de vue géométrique, les formules (13) et (14). Quand on échange α et β l'équation du plan tangent ne change pas et, par conséquent, on a toujours la même surface; mais le sens positif de chaque normale est évidemment changé. Cela résulte des expressions

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c' = i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

des cosinus directeurs de la normale. Par conséquent, les formules (13) ou (14), qui se déduisent l'une de l'autre par l'échange de α et de β, font bien correspondre à une surface (Σ) la même surface (Σ'); mais à un sens déterminé d'une normale à la surface (Σ) correspondront des sens opposés de la normale à la surface (Σ') suivant qu'on adoptera la formule (13) ou (14). Pour caractériser au point de vue géométrique chacune de ces formules, il suffira donc de donner la relation entre les sens positifs des deux normales, qui correspond par exemple à la formule (13). Pour cela considérons deux surfaces homologues (Σ), (Σ'), et deux points correspondants M, M′, sur ces deux surfaces. A un point de (Σ) décrivant une courbe infiniment petite autour de M dans un sens déterminé correspondra un point de (Σ') tournant également dans un sens déterminé autour de M′; attribuons aux deux normales un sens tel que les deux courbes paraissent être parcourues en sens contraire autour de leurs normales respectives; on aura ainsi la correspondance entre le sens des normales, définie par la formule (13) et par celles que nous en avons déduites.

Pour le démontrer, il suffit de considérer la sphère (S) de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées et dont l'équation est

$$\xi = R(\alpha - \beta).$$

Les formules (17) nous donnent pour la sphère correspondante

$$\beta' = \alpha, \qquad \alpha' = \beta, \qquad \xi' = -\frac{k^2}{R}(\alpha' - \beta').$$

Les deux premières formules montrent que le sens positif de la normale se trouve changé et la proposition précédente se vérifie dans ce cas particulier. Cela suffit; car, si l'on déforme progressivement la sphère (S) de manière à l'amener à coïncider avec une surface quelconque (Σ), la proposition établie pour la sphère (S) doit nécessairement se conserver, en vertu de la continuité, pour la surface (Σ).



LIVRE III.

LES SURFACES MINIMA.

CHAPITRE I.

RÉSUMÉ HISTORIQUE.

L'équation aux dérivées partielles de Lagrange. — Mémoire de Meusnier sur la courbure des surfaces. — Premières recherches de Monge. — Méthode rigoureuse de Legendre. — Détermination de quelques surfaces minima nouvelles, par M. Scherk. — La surface minima réglée, le théorème de M. Catalan. — Recherches générales sur la théorie par MM. O. Bonnet, Catalan et Björling.

175. Avant de continuer l'exposition des théories générales, nous allons faire une application étendue des méthodes et des résultats développés dans les deux Livres précédents. Nous avons choisi les surfaces minima dont l'étude présente un intérêt véritablement exceptionnel; car elle touche à la fois au Calcul des variations, à la Physique mathématique et à la Théorie moderne des fonctions.

Dans le célèbre Mémoire intitulé : *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies,* qui est inséré dans le t. II des *Miscellanea Taurinensia,* années 1760-61 (¹), et qui contient les principes de son *Calcul des variations,* Lagrange, après avoir généralisé les résultats obtenus par Euler relativement aux intégrales simples, se propose de montrer, dans l'Appendice I, que sa méthode s'applique aussi aux intégrales doubles; et il choisit comme exemple celle qui exprime l'aire d'une portion de surface rapportée à des coordonnées rectangulaires

$$\int\int dx\, dy \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

(¹) *Voir* aussi *Œuvres de Lagrange,* t. I, p. 335.

Il trouve ainsi que la surface minima passant par un contour donné doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0.$$

« Le problème se réduit donc, dit-il, à chercher p et q par ces conditions que

$$p\,dx+q\,dy \quad \text{et} \quad \frac{p\,dy-q\,dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

soient des différentielles exactes.

» Il est d'abord clair qu'on satisfera à ces conditions, en faisant p et q constantes, ce qui donnera un plan quelconque pour la surface cherchée; mais ce ne sera là qu'un cas particulier, car la solution générale doit être telle que le périmètre de la surface puisse être choisi à volonté. »

Lagrange se contente des remarques précédentes; car le but unique de son admirable Mémoire était la formation des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les courbes et les surfaces qui donnent la solution des problèmes posés; et il termine l'Appendice consacré aux intégrales doubles en donnant l'équation aux dérivées partielles de la surface dont l'airee st minimum parmi celles qui circonscrivent des solides égaux.

La théorie si simple et si féconde que Lagrange avait substituée aux méthodes d'Euler ne fut pas immédiatement acceptée par tous les géomètres. En 1767, Borda fit imprimer, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, un travail intitulé : *Éclaircissement sur les méthodes de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété de maximum ou de minimum,* et il crut faire une œuvre utile en démontrant par une voie nouvelle, et sans rien lui ajouter, le résultat de Lagrange.

176. C'est dans un beau Mémoire de Meusnier ([1]) qu'est commencée, et de la manière la plus heureuse, l'étude de l'équation

---

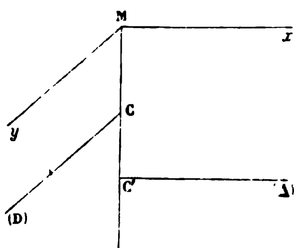
([1]) *Mémoire sur la courbure des surfaces* par M. MEUSNIER, Lieutenant en premier, surnuméraire au corps royal du Génie, Correspondant de l'Académie, lu les 14 et 21 février 1776 (*Mémoires des Savants étrangers,* t. X, p. 477; 1785).

aux dérivées partielles de Lagrange. Ce travail contient une théorie nouvelle de la courbure qui, à tous égards, aurait mérité d'être conservée à côté de celle d'Euler; Meusnier, après avoir rappelé qu'Euler avait publié en 1761, dans le Recueil de l'Académie de Berlin, le Mémoire qui contient les propositions devenues classiques sur la courbure des sections normales faites en un point donné d'une surface, ajoute que « l'on peut présenter la question sous un autre point de vue en la faisant dépendre d'une propriété intéressante, savoir qu'il existe une génération qui convient à tout élément de surface ».

La génération dont veut parler Meusnier, et qu'il développe avec précision dans le cours de son travail, est la suivante : on peut, en négligeant seulement les infiniment petits du troisième ordre, considérer tout élément de surface dans le voisinage d'un point donné, comme engendré par la rotation infiniment petite d'un petit arc de cercle autour d'un axe situé dans son plan et parallèle au plan tangent de cet élément. Il nous est aisé, aujourd'hui, de retrouver les propositions de Meusnier et de nous rendre compte de sa méthode. Si, en effet, on considère (*fig.* 13) un point quelconque M de la surface et les centres de courbure principaux C, C′ relatifs à ce point, toute surface aura en M un contact du second ordre avec la proposée si elle admet en M les mêmes directions principales Mx, My, et si, de plus, elle a les mêmes centres principaux correspondants aux deux directions principales. Si donc on veut obtenir un tore ayant un contact du second ordre avec la sphère donnée, ce tore devra admettre comme cercle générateur, soit le cercle principal de centre C et de rayon CM décrit dans le plan CMx, soit le cercle de centre C′ et de rayon C′M décrit dans le plan C′My. De plus, si l'on considère, par exemple, le premier cercle décrit dans le plan CMx, le second centre de courbure principal devra se trouver sur l'axe du tore. Cet axe sera donc assujetti à la double condition de passer par le point C′ et de se trouver dans le plan CMx. En raisonnant de même pour le second centre de courbure, on reconnaît qu'il y aura deux séries de tores osculateurs en M; tous les tores d'une même série auront un même cercle générateur, décrit dans l'un des plans principaux ayant pour centre le centre de courbure relatif à ce plan; leurs axes, tous nécessairement situés dans ce plan, passeront par l'autre centre de

courbure. Le mode de génération considéré par Meusnier revient à substituer à la surface dans le voisinage du point M le tore osculateur particulier dont l'axe est parallèle au plan tangent; les axes des deux tores qu'il obtient ainsi sont les droites D et Δ que M. Mannheim a retrouvées et introduites récemment avec succès dans la théorie de la courbure des surfaces. On s'explique aussi, par les remarques précédentes, comment Meusnier, en partant d'un point de vue tout à fait différent de celui d'Euler, est conduit néanmoins à considérer les mêmes éléments géométriques.

Fig. 13.



Comme application de sa méthode générale, Meusnier détermine d'une manière très exacte la surface dont tous les points sont des ombilics et il cherche à établir par la Géométrie l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. Par des raisonnements, qui sont à la vérité peu satisfaisants, il est conduit à cette condition que la somme des rayons de courbure principaux doit être nulle en chaque point de la surface. C'est donc dans le Mémoire de Meusnier qu'apparaît pour la première fois l'interprétation géométrique de l'équation de Lagrange.

Pour trouver des surfaces satisfaisant à cette équation

$$(1) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

Meusnier remarque que, d'après un résultat déjà donné par Monge, l'équation

$$(2) \qquad q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0$$

est celle des surfaces engendrées par une droite parallèle au plan

des xy. En l'adjoignant à l'équation (1), ce qui donne

$$(3) \qquad r + t = 0,$$

on aura, s'il en existe, les surfaces minima engendrées par une droite parallèle à un plan. L'intégration simultanée des équations (2) et (3) conduit ainsi l'auteur à l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Enfin Meusnier détermine la surface minima de révolution, et il démontre qu'elle est engendrée par la rotation d'une chaînette autour de sa base. On voit que son travail a fait connaître, en même temps que l'interprétation géométrique de l'équation de Lagrange, deux surfaces minima qui sont, aujourd'hui encore, au nombre des plus intéressantes et des plus simples. La méthode par laquelle est obtenu l'hélicoïde est féconde et a été souvent appliquée à la recherche de solutions particulières des équations aux dérivées partielles.

177. C'est dans son *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles* (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* pour 1784, p. 118) que Monge s'est occupé pour la première fois des surfaces minima et de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de Lagrange. Monge commence par intégrer exactement l'équation différentielle des caractéristiques, ce qui est le point essentiel; mais il commet ensuite quelques erreurs de raisonnement qui le conduisent à présenter la solution sous une forme inacceptable; car les coordonnées rectangulaires x, y, z sont exprimées en fonction de deux paramètres a, a' par des quadratures de la forme

$$\int (M\, da + N\, da'),$$

où M, N sont des fonctions de a et de a' ne satisfaisant pas à la condition d'intégrabilité.

Les erreurs commises par Monge pouvaient être facilement corrigées et, en effet, dans un beau *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1787, p. 309), Legendre, après avoir signalé les objections que l'on doit adresser à la méthode

primitive de Monge, ajoute ces quelques mots : Depuis « ses recherches l'ont conduit à la vraie intégrale qu'il a bien voulu me communiquer avec le procédé qu'il avait suivi; mais ce procédé tenant à quelques principes métaphysiques dont les géomètres ne conviennent pas encore, j'ai été curieux de chercher la même intégrale par la voie ordinaire, et j'y ai été engagé par M. Monge lui-même. On verra que j'y suis parvenu fort simplement par un changement de variables qui peut être utile dans d'autres occasions et que j'appliquerai même à des équations plus générales. »

Les « principes métaphysiques » dont il est question dans ce passage sont sans doute les idées de Monge sur la génération des surfaces par la méthode des enveloppes, idées qu'il a développées d'une manière systématique dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*. Nous avons peine aujourd'hui à les comprendre, sinon dans leur esprit, au moins dans leur enchaînement et dans leurs détails. Il ne faut donc pas s'étonner que le procédé nouveau de Monge, qui coïncide sans doute avec celui qu'il a fait connaître plus tard dans son Ouvrage, ait donné naissance à de sérieuses objections (¹).

178. La méthode de Legendre est élégante et irréprochable. Elle consiste à remplacer les variables x, y, z par p, q et

$$v = px + qy - z,$$

en considérant v comme une fonction de p et de q; ce qui revient, suivant une remarque de M. Chasles, à substituer à la surface sa polaire réciproque par rapport à un paraboloïde.

Legendre effectue la transformation de variables d'une manière très élégante. Il substitue aux deux expressions de Lagrange

$$p\,dx + q\,dy, \quad \frac{q\,dx - p\,dy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

(¹) Si nous nous reportons à une indication donnée en 1832 par Poisson dans une Note très courte que nous citons plus loin [p. 275], ces objections auraient été formulées par Laplace et auraient donné naissance à de longues discussions entre les deux grands géomètres.

qui doivent être des différentielles exactes, les suivantes

$$x\,dp + y\,dq = dv,$$
$$x\,d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) - y\,d\left(\frac{p}{\sqrt{1+q^2+p^2}}\right),$$

et tout se réduit à écrire que l'expression

$$\frac{\partial v}{\partial p}\,d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) - \frac{\partial v}{\partial q}\,d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

est une différentielle exacte. On a ainsi l'équation linéaire

$$(4)\qquad (1+p^2)\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial q} + (1+q^2)\frac{\partial^2 v}{\partial q^2} = 0,$$

qui, jointe aux suivantes,

$$(5)\qquad x = \frac{\partial v}{\partial p},\qquad y = \frac{\partial v}{\partial q},\qquad z = p\frac{\partial v}{\partial p} + q\frac{\partial v}{\partial q} - v,$$

suffit à déterminer complètement la surface.

L'équation (4) est de celles qu'il est possible d'intégrer par l'application des méthodes régulières; on peut obtenir les équations en termes finis des caractéristiques et appliquer ensuite la méthode de Laplace. Mais Legendre abrège beaucoup les calculs en formant l'équation

$$(1+p^2)\frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2 \theta}{\partial p\,\partial q} + (1+q^2)\frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2} + 2p\frac{\partial \theta}{\partial p} + 2q\frac{\partial \theta}{\partial q} = 0,$$

à laquelle satisfont x, y, z considérées comme fonctions de p et de q; on pourra lire l'exposition complète de cette méthode dans le grand *Traité de Calcul différentiel et intégral de Lacroix*, (2e édition, t. II, p. 625).

Nous devons remarquer que Legendre, après avoir donné les formules dont il devait la connaissance à Monge, fait connaître de nouvelles formules entièrement débarrassées de tout signe d'intégration, et qui auraient pu servir de base à une étude fructueuse des surfaces minima.

179. La méthode d'intégration donnée par Monge dans l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* n'est pas la seule que

nous lui devions; le Traité de Lacroix en contient une autre qui repose sur une idée très ingénieuse et très féconde : elle consiste à transformer une équation aux dérivées partielles en considérant les trois coordonnées x, y, z comme des fonctions de deux paramètres a et b. L'équation des surfaces minima prend ainsi la forme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2\right]\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial b^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial b^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial b^2}\right)\\ &-2\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right)\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial b}\right)\\ &+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2\right]\left(X\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

X, Y, Z étant les cosinus directeurs de la normale déterminés par les équations

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &X\frac{\partial x}{\partial a}+Y\frac{\partial y}{\partial a}+Z\frac{\partial z}{\partial a}=0,\\ &X\frac{\partial x}{\partial b}+Y\frac{\partial y}{\partial b}+Z\frac{\partial z}{\partial b}=0; \end{aligned}\right.$$

et Monge remarque qu'on peut y satisfaire en prenant

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2=0,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)^2=0, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}=\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}=\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial b}=0,$$

ce qui donne

$$x=A_1+B_1,$$
$$y=A_2+B_2,$$
$$z=A_3+B_3,$$

A_1, A_2, A_3 étant des fonctions de a et B_1, B_2, B_3 des fonctions de b, assujetties à vérifier les conditions

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &dA_1^2+dA_2^2+dA_3^2=0,\\ &dB_1^2+dB_2^2+dB_3^2=0. \end{aligned}\right.$$

Mais il est clair que cette méthode si élégante est encore sujette à des objections; car, si l'on prend pour a et b les paramètres des

lignes de longueur nulle, l'équation (6) donne simplement

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}+Y\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}+Z\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial b}=0,$$

et non les trois équations (9).

180. La méthode de Legendre et celle d'Ampère donnée en 1820 dans le XVIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* ont été pendant longtemps les seules conduisant sans objection possible à l'intégrale dont la découverte constitue un des plus beaux titres de Monge à notre admiration.

Si on laisse de côté certaines surfaces imaginaires trouvées par Poisson ([1]), on n'a connu, depuis 1776 jusqu'en 1830, que les deux surfaces minima obtenues en premier lieu par Meusnier. Pendant longtemps on n'a fait aucun usage de l'intégrale de Monge et, dans un article de deux pages qui n'était pas de nature à encourager les géomètres ([2]), Poisson déclarait en 1832 que « malheureusement on ne saurait tirer aucun parti de cette intégrale qui se trouve compliquée de quantités imaginaires et exprimée par le système de trois équations entre deux variables auxiliaires et les coordonnées courantes de la surface ».

Deux ans après, en 1834, paraissait dans le *Journal de Crelle* un travail de M. Scherk ([3]) qui ajoutait des résultats importants à la théorie des surfaces minima et contenait les premiers exemples de surfaces minima déduites de l'intégrale de Monge et de Legendre.

L'auteur rentre d'abord dans la voie ouverte par Meusnier; il décompose l'équation aux dérivées partielles de Lagrange en deux autres qui auront des solutions communes. C'est ainsi qu'en

([1]) POISSON, *Remarques sur une classe particulière d'équations aux différences partielles à trois variables* (*Correspondance de l'École Polytechnique*, t. II, p. 410; 1813).

([2]) POISSON, *Note sur la surface dont l'aire est un minimum entre des limites données* (*Journal de Crelle*, t. VIII, p. 361; 1832).

([3]) H.-F. SCHERK, *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen* (*Journal de Crelle*, t. XIII, p. 185). Ce travail est la suite et le complément d'un Mémoire couronné par la Société des Sciences de Leipzig et inséré dans le tome IV des *Acta Societ. Jablonovianæ*, p. 204-280.

supposant

$$s = 0,$$

il est conduit à la surface définie par l'équation

$$(11) \qquad e^{az} = \frac{\cos ax}{\cos ay}.$$

En prenant les coordonnées semi-polaires z, ρ, θ et en supposant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta} = 0,$$

il obtient tous les hélicoïdes qui sont des surfaces minima; ils sont déterminés par l'équation

$$(12) \qquad z = b\log\left[\sqrt{\rho^2+a^2}+\sqrt{\rho^2-b^2}\right]+a\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{b\sqrt{\rho^2+a^2}}{a\sqrt{\rho^2-b^2}} - a\theta + c,$$

où a, b, c sont trois constantes quelconques ([1]), et ils comprennent comme cas particuliers à la fois l'alysséide et l'hélicoïde à plan directeur, qui correspondent respectivement aux hypothèses $a = 0$ et $b = 0$. L'auteur montre quelles valeurs on devra attribuer aux fonctions arbitraires qui entrent dans les formules de Monge pour retrouver les surfaces précédentes. Mais de plus, et c'est là l'un des principaux mérites de son travail, il déduit par l'unique emploi de ces formules des surfaces nouvelles, assez compliquées mais réelles. A la fin de son étude, il se propose, mais sans y réussir complètement, de déterminer toutes les surfaces minima engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Cette question, dont nous avons déjà donné une solution (n° **11**), a été résolue pour la première fois par M. Catalan ([2]) qui a prouvé que

---

([1]) En appliquant les méthodes du n° 73 à ces hélicoïdes on trouve que leur élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2 + b^2)\,d\theta^2.$$

Tous ceux pour lesquels la somme $a^2 + b^2$ est la même sont donc applicables les uns sur les autres.

([2]) Catalan, *Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. VII, p. 203; 1842). *Voir* aussi J.-A. Serret, *Note sur la surface réglée don les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraire* (*Journal de Liouville*, t. XI, p. 451; 1846).

la seule surface minima réelle engendrée par le mouvement d'une ligne droite est l'hélicoïde à plan directeur. On peut la rattacher d'ailleurs à une proposition plus générale obtenue ultérieurement par MM. Beltrami et Dini ([1]) et d'après laquelle les seules surfaces réglées pour lesquelles il existe une relation entre les deux rayons de courbure sont des hélicoïdes.

181. Nous laisserons de côté différentes recherches que nous aurons l'occasion de signaler au cours de cette étude et nous passerons immédiatement à une courte Note de M. O. Bonnet insérée en 1853 dans les *Comptes rendus* ([2]) et qui contient des résultats de la plus haute importance pour la théorie des surfaces minima. L'éminent géomètre y indique un système nouveau de formules relatives à la théorie générale des surfaces. On peut caractériser la méthode de M. O. Bonnet et en même temps rendre compte des avantages qu'elle présente, en remarquant que les variables employées pour la représentation analytique de la surface constituent un système de coordonnées tangentielles. Or les développements donnés dans le Livre précédent nous montrent que, si les coordonnées tangentielles jouent le même rôle que les coordonnées ponctuelles dans la théorie des systèmes conjugués et des lignes asymptotiques, elles donnent naissance à des calculs et à des propositions plus simples dans l'étude des questions relatives aux lignes de courbure. Les variables choisies par M. Bonnet sont les suivantes : Étant donnés une surface (Σ) et un point M de cette surface, le plan tangent est déterminé par sa représentation sphérique m sur la sphère de rayon 1 et par sa distance au centre de cette sphère; quant au point m de la sphère, il est déterminé par sa longitude φ et sa colatitude θ. L'équation du plan tangent s'écrit alors

$$X \sin\theta \cos\varphi + Y \sin\theta \sin\varphi + Z \cos\theta + \delta = 0 \tag{13}$$

([1]) Beltrami, *Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe* (*Annales de Tortolini*, t. VII, p. 105; 1865).

Dini (U.), *Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dell' altro* (même Volume, p. 205).

([2]) O. Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (*Comptes rendus*, t. XXXVII, p. 529; 1853).

mais l'auteur transforme cette équation en introduisant à la place de θ et de φ les variables isothermes

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = y, \qquad \varphi = x, \qquad \frac{\delta}{\sin\theta} = -z,$$

et elle prend alors la forme

$$\mathrm{X}\cos x + \mathrm{Y}\sin x + \mathrm{Z}\,i\sin iy = z. \tag{14}$$

Ce ne sont pas, on le voit, les variables que nous avons considérées au Chap. VII du Livre précédent; mais la suite des calculs amène le savant auteur à introduire ces variables, très voisines des précédentes, au moins dans certaines applications. On pourra consulter, en particulier, le *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* inséré en 1860 dans le t. V (2[e] série) du *Journal de Liouville,* qui contient le développement complet et systématique de la méthode de M. Bonnet et l'on trouvera à la page 183 de ce beau travail l'équation des lignes de courbure ramenée à la forme simple

$$r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0.$$

Les recherches de M. Bonnet, avant d'être développées dans le Mémoire que nous venons de citer, ont été indiquées d'une manière très nette dans la Note de 1853 et dans trois autres Notes insérées aux *Comptes rendus* [1]. Elles ont réalisé, on peut le dire, un progrès décisif dans la théorie des surfaces minima. Elles ont donné l'équation intégrale sous une forme qui a permis d'obtenir toutes les surfaces réelles et un nombre illimité de surfaces algébriques; elles ont fait connaître surtout un grand nombre de propriétés géométriques communes à toutes ces surfaces; elles ont enfin fourni la solution complète du problème suivant qui est fondamental : *Déterminer la surface minima passant*

---

[1] O. Bonnet, *Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans l'équation intégrale des surfaces minima* (*Comptes rendus,* t. XL, p. 1107; 1855). — *Observations sur les surfaces minima* (*Comptes rendus,* t. XLI, p. 1057; 1855). — *Nouvelles remarques sur les surfaces à aire minima,* (*Comptes rendus,* t. XLII, p. 532; 1856).

par une courbe quelconque et admettant en chaque point de cette courbe un plan tangent donné. Nous compléterons d'ailleurs, dans notre exposition, ces indications rapides.

La méthode de M. O. Bonnet est directe et indépendante de l'intégrale de Monge. Dans un travail (1) publié par extraits dans les *Comptes rendus* en 1855, M. Catalan a fait connaître différentes transformations de cette intégrale et de l'équation aux dérivées partielles, qui l'ont conduit, en particulier, à un système de formules entièrement débarrassées d'imaginaires. Il a aussi indiqué les moyens d'obtenir un nombre illimité de surfaces algébriques.

182. Dans ces derniers temps, M. Lie a appelé l'attention des géomètres sur des recherches qui, malgré l'intérêt qu'elles présentent, étaient restées ignorées. En 1844, E.-G. Björling, professeur à l'Université d'Upsal, a inséré dans les *Archives de Grunert* (t. IV, p. 290) un Mémoire de vingt-cinq pages intitulé : *In integrationem æquationis derivatarum partialium superficiei cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis æquales sunt signoque contrario.* Ce travail mérite une analyse détaillée. L'auteur y reprend d'abord la méthode de Legendre; mais, en choisissant des variables nouvelles, il est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{2\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0,$$

qui est plus simple que celle de Legendre et qu'il intègre par l'application régulière de la méthode de Laplace. Il obtient ensuite des expressions très simples des coordonnées x, y, z en fonction des deux variables α et β, et de deux fonctions arbitraires. Puis il indique comment on détermine ces fonctions arbitraires de telle manière que la surface passe par une courbe donnée et y admette en chaque point un plan tangent donné. La solution de ce dernier problème, que Björling a eu le mérite de poser et de résoudre le

(1) Une rédaction développée des recherches de M. Catalan a paru en 1858 dans le XXXVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* sous le titre suivant : *Mémoire sur les surfaces dont les rayons de courbure en chaque point sont égaux et de signes contraires.*

premier sans en apprécier peut-être toute l'importance, est ramenée dans son Mémoire à la détermination d'une fonction dont la dérivée troisième est connue.

Björling examine ensuite quelques autres problèmes qu'on peut rattacher au précédent, par exemple le suivant : *Déterminer la surface minima qui coupe une surface donnée suivant une courbe telle qu'en chacun de ses points p et q soient des fonctionsdonnées à l'avance de x, y, z.*

Le reste du Mémoire ne contient rien de nouveau.

183. Les importantes recherches de M. Weierstrass, publiées en 1866 (¹), reposent sur l'emploi des formules de Monge, mises sous une forme extrêmement élégante, et qui paraît la plus commode dans les applications. M. Weierstrass a résolu, le premier, plusieurs questions essentielles : il a, en particulier, donné le moyen de trouver toutes les surfaces minima réelles et algébriques. Ses formules établissent de la manière la plus claire le lien qui existe entre la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et celle des surfaces minima, puisqu'elles montrent qu'à toute fonction de l'argument imaginaire correspond une surface minima réelle. Mais, comme nous ferons connaître les recherches de cet illustre géomètre ainsi que les principaux travaux publiés depuis 1867, nous arrêterons ici cet exposé historique en signalant toutefois un Mémoire de M. Beltrami *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima,* inséré en 1868 dans le t. VII des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne* (2ᵉ série). Ce beau travail, sur lequel nous aurons à revenir, contient une Notice historique très étendue qui nous a permis, du moins nous l'espérons, de n'oublier aucun travail important publié sur notre sujet avant 1860. On consultera aussi avec le plus grand profit le Mémoire de M. Schwarz intitulé *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen,* inséré au tome LXXX du *Journal de Crelle* (p. 280, 1875).

(¹) WEIERSTRASS, *Ueber die Flächen deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist* (*Monatsberichte der Berliner Akademie,* pp. 612, 855; 1866). *Ueber eine besondere Gattung von Minimalflächen* (même Recueil, p. 511; 1867).

CHAPITRE II.

LES SURFACES MINIMA EN COORDONNÉES PONCTUELLES.

Première condition à laquelle doit satisfaire la surface minima passant par un contour donné. — Intégration de l'équation aux dérivées partielles. — Formules de Monge. — Formules de Legendre ne contenant aucun signe d'intégration. — Double système de formules donné par M. Weierstrass. — Détermination de toutes les surfaces minima algébriques et réelles. — Relation entre la théorie moderne des fonctions et celle des surfaces minima.

---

184. Considérons une surface quelconque, ou plutôt une portion continue de surface (Σ) limitée par un contour, et proposons-nous de trouver la variation de l'aire quand on passe à une surface infiniment voisine. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de (Σ); c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en ce point. Nous prendrons pour coordonnées curvilignes u et v les paramètres des lignes de courbure de la surface. Alors, si l'on désigne par R, R' les deux rayons de courbure au point considéré, les formules d'Olinde Rodrigues nous donneront

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}+\mathrm{R}\dfrac{\partial c}{\partial u}=0, & \dfrac{\partial y}{\partial u}+\mathrm{R}\dfrac{\partial c'}{\partial u}=0, & \dfrac{\partial z}{\partial u}+\mathrm{R}\dfrac{\partial c''}{\partial u}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v}+\mathrm{R}'\dfrac{\partial c}{\partial v}=0, & \dfrac{\partial y}{\partial v}+\mathrm{R}'\dfrac{\partial c'}{\partial v}=0, & \dfrac{\partial z}{\partial v}+\mathrm{R}'\dfrac{\partial c''}{\partial v}=0. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial u}\dfrac{\partial c}{\partial v}+\dfrac{\partial c'}{\partial u}\dfrac{\partial c'}{\partial v}+\dfrac{\partial c''}{\partial u}\dfrac{\partial c''}{\partial v}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}=0. \end{cases}$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(3)\quad \begin{cases} e^2=\left(\dfrac{\partial c}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial c'}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial c''}{\partial u}\right)^2,\\[2mm] g^2=\left(\dfrac{\partial c}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial c'}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial c''}{\partial v}\right)^2,\\[2mm] \mathrm{E}^2=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\[2mm] \mathrm{G}^2=\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2; \end{cases}$$

on aura évidemment

$$E^2 = e^2 R^2, \qquad G^2 = R'^2 g^2,$$

et l'on obtiendra pour l'élément linéaire de la surface (Σ) l'expression

$$(4) \qquad ds^2 = R^2 e^2\, du^2 + R'^2 g^2\, dv^2 = E^2\, du^2 + G^2\, dv^2.$$

Cela posé, considérons une surface (Σ') infiniment voisine de (Σ); la normale en un point M de (Σ) rencontre (Σ') en un point M'. Désignons par λ la distance MM'; la surface (Σ') sera, évidemment, définie si l'on donne λ en fonction de u et de v, et les coordonnées X, Y, Z d'un point de (Σ') seront déterminées par les formules

$$X = x + c\lambda, \qquad Y = y + c'\lambda, \qquad Z = z + c''\lambda,$$

qui donnent

$$(5) \qquad \begin{cases} dX = (\lambda - R)\dfrac{\partial c}{\partial u}\, du + (\lambda - R')\dfrac{\partial c}{\partial v}\, dv + c\, d\lambda, \\ dY = (\lambda - R)\dfrac{\partial c'}{\partial u}\, du + (\lambda - R')\dfrac{\partial c'}{\partial v}\, dv + c'\, d\lambda, \\ dZ = (\lambda - R)\dfrac{\partial c''}{\partial u}\, du + (\lambda - R')\dfrac{\partial c''}{\partial v}\, dv + c''\, d\lambda. \end{cases}$$

On en déduit, pour l'élément linéaire de (Σ'), l'expression

$$(6) \qquad ds'^2 = (\lambda - R)^2 e^2\, du^2 + (\lambda - R')^2 g^2\, dv^2 + d\lambda^2$$

et, pour l'élément superficiel,

$$dS = EG\left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{R'}\right)\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{e^2(\lambda - R)^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{g^2(\lambda - R')^2}}, \; du\, dv$$

185. Supposons maintenant que l'on considère une portion de (Σ) limitée par un contour (C) et que l'on veuille comparer l'aire de cette portion à celle d'une surface infiniment voisine (Σ') passant par le même contour. Alors λ devra être une fonction infiniment petite s'annulant en tous les points de (C). L'aire de (Σ') sera représentée par l'intégrale double

$$(7) \; S = \iint EG\left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{R'}\right)\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{e^2(\lambda - R)^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{g^2(\lambda - R')^2}}\, du\, dv,$$

étendue à toutes les valeurs de u, v correspondant aux points de (Σ) situés à l'intérieur de (C); et cette aire, développée suivant les puissances de la quantité infiniment petite qui entre en facteur dans λ, pourra s'écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} S = &\iint \mathrm{EG}\, du\, dv - \iint \mathrm{EG}\lambda\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) du\, dv \\ &+ \iint \mathrm{EG}\left[\frac{\lambda^2}{RR'} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{2e^2R^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{2g^2R'^2}\right] du\, dv, \end{aligned}\right.$$

les termes négligés étant du troisième ordre seulement. Si l'on fait $\lambda = 0$, on trouve l'aire de (Σ). L'accroissement de l'aire quand on passe de (Σ) à (Σ') sera donc déterminé par la formule

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta S = &-\iint \mathrm{EG}\lambda\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) du\, dv \\ &+ \iint \mathrm{EG}\left[\frac{\lambda^2}{RR'} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{2e^2R^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{2g^2R'^2}\right] du\, dv, \end{aligned}\right.$$

au même ordre d'approximation que précédemment.

Il résulte immédiatement de là qu'il faut, pour qu'une surface soit minima, que la somme de ses rayons de courbure principaux soit nulle en chaque point. En effet, supposons qu'il en soit autrement et prenons pour λ une expression de la forme

$$\lambda = m\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\varphi^2,$$

φ étant une fonction de u et de v qui devra s'annuler en tous les points du contour (C) et m une constante infiniment petite. L'expression (9) de ΔS prendra la forme

$$\Delta S = -m\iint \mathrm{EG}\varphi^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)^2 du\, dv,$$

les termes négligés étant de l'ordre de m^2. L'intégrale précédente n'est pas nulle, puisque tous ses éléments ont le même signe. On peut donc prendre m assez petit pour que les termes négligés, qui sont de l'ordre de m^2, soient plus petits que le précédent et, par conséquent, pour que chaque élément de ΔS ait le signe de $-m$. En donnant à m le signe positif, on trouvera pour ΔS une valeur

négative; on obtiendra donc une surface dont l'aire sera plus petite que celle de (Σ).

Ainsi la première condition pour que l'aire de (Σ) soit la plus petite possible est que la somme des rayons de courbure principaux soit nulle en chaque point de la surface, ou, ce qui est la même chose, que l'indicatrice soit partout une hyperbole équilatère. L'usage a prévalu d'appeler *surfaces minima* toutes celles qui satisfont à cette condition; mais la méthode que nous avons suivie montre bien que, si elle est nécessaire, elle ne sera pas toujours suffisante. Faisons en effet $R' = -R$ dans la formule (9); l'expression de ΔS deviendra

$$(10) \qquad \Delta S = \int\int eg\left[-\lambda^2 + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^2}{2e^2} + \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)^2}{2g^2}\right] du\, dv,$$

les termes négligés étant du troisième ordre par rapport à λ; et il faudra que l'intégrale double qui figure dans le second membre de cette formule soit positive quand on y substituera une fonction quelconque, assujettie seulement à s'annuler en tous les points du contour de (Σ). Nous reviendrons plus loin sur cette condition supplémentaire et nous nous attacherons d'abord à la détermination des surfaces pour lesquelles la somme des rayons de courbure est égale à zéro.

186. Nous venons de voir que l'on peut les définir encore en remarquant que l'indicatrice est une hyperbole équilatère ou que les lignes asymptotiques se coupent à angle droit. Il y a avantage à énoncer la propriété caractéristique des surfaces minima sous la forme suivante : *Les deux familles de lignes de longueur nulle tracées sur la surface doivent former un réseau conjugué.* On sait en effet que l'hyperbole équilatère est la seule conique admettant pour diamètres conjugués les deux droites de coefficients angulaires $+i$ et $-i$.

Ce point étant admis, prenons comme variables indépendantes α et β les paramètres de ces deux systèmes de lignes de longueur nulle. Puisqu'elles forment un réseau conjugué, les coordonnées rectangulaires x, y, z seront trois solutions particulières d'une

équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - B\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = 0.$$

On aura donc

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial x}{\partial\alpha} - B\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0,\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial y}{\partial\alpha} - B\frac{\partial y}{\partial\beta} = 0,\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial z}{\partial\alpha} - B\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0,\end{aligned}\right.$$

et de plus, par suite du choix particulier de α et de β,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2 = 0,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Les formules (11) et (12) expriment évidemment toutes les conditions résultant, et de la définition de la surface, et du choix des coordonnées.

Or, si l'on différentie la première des équations (12) par rapport à β, la seconde par rapport à α, et que l'on remplace les dérivées secondes par leurs valeurs tirées des équations (11), on trouvera

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) A = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) B = 0.$$

Comme on ne peut avoir

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0,$$

sans quoi l'arc de toute courbe tracée sur la surface serait nul, il faut que A et B soient nuls; les équations (11) se réduiront aux suivantes

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

dont l'intégration est immédiate et nous donne

$$(13)\qquad \begin{cases} x = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \\ y = f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta), \\ z = f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta). \end{cases}$$

Mais, pour que les équations (12) soient satisfaites, il faut que l'on ait

$$(14)\qquad \begin{cases} f_1'^2(\alpha) + f_2'^2(\alpha) + f_3'^2(\alpha) = 0, \\ \varphi_1'^2(\beta) + \varphi_2'^2(\beta) + \varphi_3'^2(\beta) = 0. \end{cases}$$

Les formules (13) nous montrent que les surfaces minima appartiennent à la grande classe des surfaces que nous avons déjà considérées (Liv. I, Ch. IX) et qui peuvent être engendrées de deux manières différentes par la translation d'une courbe. Nous reviendrons plus loin sur cette interprétation géométrique des formules (13) et nous indiquerons tout le parti qu'en a tiré M. Lie.

187. Comme on peut, sans changer le système de coordonnées, substituer à α et à β des fonctions quelconques de ces variables, on pourra toujours supposer

$$f_1(\alpha) = \alpha, \qquad \varphi_1(\beta) = \beta.$$

On déduira alors des formules (14)

$$f_3'(\alpha) = i\sqrt{1 + f_2'^2(\alpha)}, \qquad \varphi_3'(\beta) = i\sqrt{1 + \varphi_2'^2(\beta)},$$

et, si l'on supprime les indices, les formules (13) prendront la forme

$$(15)\qquad \begin{cases} x = \alpha + \beta, \\ y = f(\alpha) + \varphi(\beta), \\ z = i\int\sqrt{1 + f'^2(\alpha)}\,d\alpha + i\int\sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}\,d\beta, \end{cases}$$

qui est due à Monge [1].

---

[1] *Analyse appliquée à la Géométrie*, p. 211. La méthode par laquelle nous avons obtenu les équations finies de la surface minima laisse de côté, comme la plupart de celles qui ont été employées, le cas exceptionnel où les deux systèmes de lignes de longueur nulle sont confondus dans toute l'étendue de la surface. Alors. nous l'avons déjà vu (n° 116), la surface sera une développable imaginaire

Legendre et Monge ont aussi développé une autre manière de résoudre les équations (14). Supposons que l'on ait obtenu six fonctions satisfaisant à ces équations et posons

$$\frac{f_2'(\alpha)}{f_1'(\alpha)} = \alpha_1, \qquad \frac{\varphi_2'(\beta)}{\varphi_1'(\beta)} = \beta_1,$$

ce qui donnera

$$f_3'(\alpha) = i f_1'(\alpha)\sqrt{1+\alpha_1^2}, \qquad \varphi_3'(\beta) = i\varphi_1'(\beta)\sqrt{1+\beta_1^2},$$

Si l'on prend comme nouvelles variables α_1 et β_1, on pourra toujours donner à $f_1'(\alpha)$, $\varphi_1'(\beta)$ les formes suivantes

$$f_1'(\alpha) = f''(\alpha_1)\frac{d\alpha_1}{d\alpha}, \qquad \varphi_1'(\beta) = \varphi''(\beta_1)\frac{d\beta_1}{d\beta},$$

et les formules (13) deviendront alors

$$\begin{aligned} x &= f'(\alpha_1) + \varphi'(\beta_1), \\ y &= \alpha_1 f'(\alpha_1) - f(\alpha_1) + \beta_1\varphi'(\beta_1) - \varphi(\beta_1), \\ z &= i\int\sqrt{1+\alpha_1^2}\, f''(\alpha_1)\, d\alpha_1 + i\int\sqrt{1+\beta_1^2}\, \varphi''(\beta_1)\, d\beta_1. \end{aligned}$$

Il y a encore des quadratures à effectuer. Voici comment Legendre les a fait disparaître. En intégrant par parties, on a

$$\int\sqrt{1+\alpha_1^2}\, f''(\alpha_1)\, d\alpha_1 = f'(\alpha_1)\sqrt{1+\alpha_1^2} - \frac{\alpha_1 f(\alpha_1)}{\sqrt{1+\alpha_1^2}} + \int\frac{f(\alpha_1)\, d\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc on pose

$$f(\alpha_1) = (1+\alpha_1^2)^{\frac{3}{2}}\, F'(\alpha_1),$$

et de même

$$\varphi(\beta_1) = (1+\beta_1^2)^{\frac{3}{2}}\, \Phi'(\beta_1),$$

les formules seront débarrassées de tout signe d'intégration. On

---

circonscrite au cercle de l'infini; elle doit être considérée comme une surface minima; car elle satisfait à l'équation du premier ordre

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

et, par suite, on le vérifiera aisément, à l'équation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

qui caractérise les surfaces minima.

les trouvera dans le Mémoire de Legendre et dans le Traité de Lacroix (t. II, p. 627).

188. Mais la solution la plus élégante des équations (14) est celle qui a été indiquée par M. Enneper ([1]) et complètement développée pour la première fois par M. Weierstrass dans les articles déjà cités [p. 280] des *Monatsberichte*.

Posons

$$\frac{f_1'(\alpha) + i f_2'(\alpha)}{-f_3'(\alpha)} = u,$$

la première des équations (14) nous donnera

$$f_1'(\alpha) - i f_2'(\alpha) = \frac{f_3'(\alpha)}{u},$$

et par suite les rapports des trois dérivées f_1', f_2', f_3' seront déterminés par les formules

$$\frac{f_1'(\alpha)}{1 - u^2} = \frac{f_2'(\alpha)}{i(1 + u^2)} = \frac{f_3'(\alpha)}{2u};$$

u est évidemment une fonction de α. Nous pouvons par conséquent, en écartant le cas exceptionnel où u serait une constante, représenter la valeur commune des rapports précédents par

$$\frac{1}{2}\mathfrak{F}(u)\frac{du}{d\alpha}.$$

Nous aurons alors

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\mathfrak{F}(u)\,du,$$

$$f_2(\alpha) = \frac{i}{2}\int (1 + u^2)\mathfrak{F}(u)\,du,$$

$$f_3(\alpha) = \int u\,\mathfrak{F}(u)\,du.$$

On trouverait de même, en posant

(16) $$\frac{\varphi_1'(\beta) - i\varphi_2'(\beta)}{-\varphi_3'(\beta)} = u_1,$$

([1]) Enneper (A.), *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. IX, p. 107; 1864).

et en suivant une méthode analogue pour ce qui concerne β,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\beta) &= \frac{1}{2}\int(1-u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,\\
\varphi_2(\beta) &= -\frac{i}{2}\int(1+u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,\\
\varphi_3(\beta) &= \int u_1\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1.
\end{aligned}$$

Les formules qui définissent la surface seront alors

$$(17)\quad \begin{cases}
x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du + \dfrac{1}{2}\int(1-u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,\\
y = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du - \dfrac{i}{2}\int(1+u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,\\
z = \displaystyle\int u\,\mathfrak{F}(u)\,du + \int u_1\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1.
\end{cases}$$

Il suffira de remplacer $\mathfrak{F}(u)$ par la dérivée troisième d'une fonction $f(u)$ de u, et de même $\mathfrak{F}_1(u_1)$ par la dérivée troisième d'une fonction $f_1(u_1)$, pour obtenir les formules suivantes, débarrassées de toute quadrature,

$$(18)\quad \begin{cases}
x = \dfrac{1-u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u)\\
\qquad + \dfrac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1) + u_1f_1'(u_1) - f_1(u_1),\\
y = i\dfrac{1+u^2}{2}f''(u) - iuf'(u) + if(u)\\
\qquad - i\dfrac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1) + iu_1f_1'(u_1) - if_1(u_1),\\
z = uf''(u) - f'(u) + u_1f_1''(u_1) - f_1'(u_1),
\end{cases}$$

qui ont été données par M. Weierstrass.

189. Avant de poursuivre l'application des formules précédentes, nous remarquerons qu'elles laissent de côté le cas où l'une des quantités u, u_1 définies par les formules (15) ou (16) ne pourrait être choisie comme variable indépendante et se réduirait à une constante. Supposons, par exemple, que u soit constante. On aura alors

$$\frac{f_1'(\alpha)}{1-u^2} = \frac{f_2'(\alpha)}{i(1+u^2)} = \frac{f_3'(\alpha)}{2u},$$

et, si l'on désigne par $\frac{1}{2}\theta'(\alpha)$ la valeur commune de ces rapports, il faudra substituer aux formules (17) les suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2}\theta(\alpha) - \frac{1}{2}\int(1-u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y &= i\frac{1+u^2}{2}\theta(\alpha) - \frac{i}{2}\int(1+u_1^2)\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z &= u\,\theta(\alpha) + \int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1. \end{aligned}$$

Les courbes $u_1 =$ const. seront des droites parallèles allant rencontrer le cercle de l'infini. La surface correspondante sera donc un cylindre imaginaire (¹).

Si u et u_1 étaient toutes les deux constantes, la surface, on le reconnaîtra aisément, se réduirait à un plan.

190. Après avoir signalé ce cas exceptionnel, revenons aux formules (17) et (18). Nous allons indiquer d'abord comment on en déduit toutes les surfaces algébriques.

Si les fonctions désignées par $f(u)$, $f_1(u_1)$ dans les formules (18) sont algébriques, la surface minima correspondante le sera aussi. Nous allons démontrer la proposition réciproque et prouver que la surface minima ne peut être algébrique que si les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$ sont algébriques.

Les formules (17) nous donnent les relations

$$(19) \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u} - i\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial z}{\partial u}} = -u, \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_1} + i\dfrac{\partial y}{\partial u_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial u_1}} = -u_1,$$

dont les premiers membres peuvent être calculés, car ils se rapportent à des déplacements effectués suivant les lignes de longueur nulle de la surface ; p et q désignant les dérivées partielles de z, les équations

$$(20) \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \end{cases}$$

(¹) Les surfaces de cette nature sont celles qui ont été signalées par Poisson dans le tome II de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*. *Voir* p. 275.

déterminent deux systèmes différents de valeurs pour les différentielles dx, dy, dz. Soient

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z;\quad \delta' x,\ \delta' y,\ \delta' z$$

ces deux systèmes différents; u et u_1 seront évidemment définis, soit par les formules

$$(21)\qquad \frac{\delta x - i\,\delta y}{\delta z} = -u, \qquad \frac{\delta' x + i\,\delta' y}{\delta' z} = -u_1,$$

soit par les suivantes

$$(22)\qquad \frac{\delta' x - i\delta' y}{\delta' z} = -u, \qquad \frac{\delta x + i\,\delta y}{\delta z} = -u_1,$$

et seront par conséquent, dans le cas qui nous occupe, des fonctions algébriques de x et de y. Réciproquement x, y et, par suite, z seront des fonctions algébriques de u et de u_1. Soit

$$\varphi(u) + \varphi_1(u_1)$$

l'expression de l'une quelconque des coordonnées; on aura une relation algébrique

$$\mathrm{F}[\varphi(u) + \varphi_1(u_1),\ u,\ u_1] = 0.$$

Il résulte de là, évidemment, que $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u_1)$ seront des fonctions algébriques; car si, dans l'équation précédente, on donne à u_1, par exemple, une valeur numérique quelconque, $\varphi_1(u_1)$ prendra une valeur constante et il restera une équation algébrique déterminant $\varphi(u)$.

En appliquant cette proposition aux trois coordonnées, nous voyons que les parties de leurs expressions qui ne dépendent que de u

$$\alpha = \frac{1-u^2}{2} f''(u) + uf'(u) - f(u),$$
$$\beta = i\frac{1+u^2}{2} f''(u) - iuf'(u) + if(u),$$
$$\gamma = uf''(u) - f'(u),$$

sont des fonctions algébriques de u; il en sera donc de même de la combinaison

$$\alpha(1-u^2) + \beta i(1+u^2) + 2\gamma u = -2f(u).$$

Comme le raisonnement s'applique également à la fonction $f_1(u_1)$, la proposition de M. Weierstrass est complètement démontrée.

191. Recherchons maintenant à quelles conditions la surface représentée par les équations (17) ou (18) sera réelle. Considérons d'abord les formules (17); si l'on y prend pour $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u)$ des fonctions imaginaires conjuguées et si, de plus, les intégrales relatives à u et à u_1 sont prises suivant des chemins imaginaires conjugués, les expressions des différentes coordonnées seront évidemment réelles; car, à chaque élément de l'intégrale relative à u, on pourra faire correspondre, dans chacune des trois formules, un élément imaginaire conjugué de l'autre intégrale. Nous allons montrer que ces conditions, qui sont suffisantes, sont aussi nécessaires.

Reportons-nous en effet aux formules (20) à (22). Pour tout point réel d'une nappe réelle, on pourra supposer que les deux systèmes de rapports δx, δy, δz; $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ définis par les formules (20) se déduisent l'un de l'autre par le changement de i en $-i$. Par suite les valeurs de u et de u_1 déduites de l'un ou l'autre des systèmes (21), (22) seront imaginaires conjuguées.

On déduit, d'autre part, des formules (17) les suivantes

$$\frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial u} = \mathfrak{F}(u), \qquad \frac{\partial x}{\partial u_1} + i\frac{\partial y}{\partial u_1} = \mathfrak{F}_1(u_1).$$

Comme les premiers membres de ces relations sont imaginaires conjugués, il en sera de même des seconds. Les fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ doivent donc être imaginaires conjuguées, ainsi que les arguments u, u_1.

Il résulte de là que les nappes réelles de la surface minima seront représentées par les équations

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathcal{R}\int (1-u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du,\\ y &= \mathcal{R}\int i(1+u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du,\\ z &= \mathcal{R}\int 2u\,\mathfrak{F}(u)\,du,\end{aligned}\right.$$

le signe $\mathcal{R}$, déjà employé (n° **126**), indiquant que l'on prend seulement la partie réelle de la fonction. Les deux variables réelles

dont dépend la position du point sont alors la partie réelle et la partie imaginaire de l'argument u.

En ce qui concerne la recherche des surfaces réelles, les formules (18) présentent une légère difficulté. Il est clair que, si l'on y substitue pour $f(u)$, $f_1(u_1)$ deux fonctions imaginaires conjuguées, la surface correspondante aura des nappes réelles que l'on obtiendra en donnant à u et à u_1 des valeurs imaginaires conjuguées; mais la proposition réciproque n'est pas exacte. Pour que la surface minima soit réelle, il n'est pas nécessaire que $f(u)$ et $f_1(u_1)$ soient des fonctions imaginaires conjuguées. En effet, les expressions de x, y, z ne changent pas, on le vérifie aisément, si l'on y remplace $f(u)$, $f_1(u_1)$ respectivement par

$$\begin{aligned} f(u) + A(1-u^2) + Bi(1+u^2) + 2Cu &= \varphi(u), \\ f_1(u_1) - A(1-u_1^2) + Bi(1+u_1^2) - 2Cu_1 &= \varphi_1(u_1), \end{aligned}$$

A, B, C désignant des constantes quelconques. En admettant même que $f(u)$ et $f_1(u_1)$ soient des fonctions imaginaires conjuguées, la même propriété ne saurait appartenir aux fonctions $\varphi(u)$, $\varphi_1(u_1)$ pour toutes les valeurs des constantes A, B, C. Mais on peut démontrer que, dans le cas où la surface minima est réelle, parmi toutes les déterminations possibles du système des deux fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, il en existe toujours une infinité pour lesquelles les deux fonctions sont imaginaires conjuguées.

En effet, les équations

$$(24) \qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\ [(1-u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u)], \\ y = \mathcal{R}\, i[(1+u^2)f''(u) - 2uf'(u) + 2f(u)], \\ z = \mathcal{R}\ [2uf''(u) - 2f'(u)] \end{cases}$$

représentent évidemment une surface réelle; et pour toute fonction $f(u)$ satisfaisant à l'équation

$$(25) \qquad f'''(u) = \mathcal{F}(u),$$

les différentielles des coordonnées déduites des formules (24) sont identiques à celles que l'on obtient au moyen des formules (23); par conséquent les équations (23) et (24) représentent deux nappes réelles que l'on pourra toujours faire coïncider par une simple translation imprimée à l'une d'elles. Ce point étant admis,

substituons à la place de $f(u)$, dans les formules (24), la fonction plus générale qui satisfait encore à l'équation (25)

$$f(u) + A(1 - u^2) + Bi(1 + u^2) + 2Cu.$$

Les expressions de x, y, z s'y trouveront augmentées respectivement de

$$-4\mathfrak{R}A, \quad -4\mathfrak{R}B, \quad -4\mathfrak{R}C.$$

On pourra disposer des parties réelles des constantes A, B, C de manière à rendre identiques les deux surfaces représentées par les formules (23) et (24); quant aux parties imaginaires de ces constantes, elles demeureront entièrement arbitraires. On pourra donc, sans changer la surface, substituer à la valeur obtenue pour $f(u)$ l'une quelconque des fonctions comprises dans l'expression générale

$$f(u) + ai(1 - u^2) + b(1 + u^2) + ciu,$$

où a, b, c sont trois constantes *réelles* quelconques.

192. Revenons aux formules (23). Elles établissent, comme l'a fait remarquer M. Weierstrass, le lien le plus étroit entre la théorie des fonctions imaginaires et celle des surfaces minima. En effet, à toute fonction $\mathcal{F}(u)$, ces formules font correspondre une surface minima réelle dont les différentes propriétés donneront la représentation géométrique la plus parfaite et la plus élégante de toutes les relations analytiques auxquelles la fonction donne naissance.

Cette surface minima est pleinement déterminée de forme et d'orientation, mais elle peut être déplacée parallèlement à elle-même, si l'on ajoute des constantes quelconques aux intégrales qui figurent dans les formules (23). On peut donc dire qu'à une fonction $\mathcal{F}(u)$ de l'argument imaginaire correspond une seule surface minima, mais la proposition réciproque n'est pas vraie en général. Il suffit, pour le reconnaître, de remarquer que les formules (21) et (22) du n° 190 nous conduisent à deux systèmes différents de valeurs pour u et u_1 et, par conséquent, à deux valeurs,, différentes en général, pour la fonction $\mathcal{F}(u)$.

On arrive au même résultat par le raisonnement suivant. Reprenons les formules (17) et cherchons si l'on peut leur substi-

tuer d'autres formules semblables, où u et u_1 soient remplacées par v et v_1 et $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par d'autres fonctions $\mathcal{G}(v)$, $\mathcal{G}_1(v_1)$. Les paramètres u et u_1 étant, comme v et v_1, ceux des lignes de longueur nulle de la surface, il faudra que v soit fonction de u et v_1 fonction de u_1, ou bien que v soit fonction de u_1 et v_1 fonction de u. La première hypothèse nous donnerait évidemment

$$v = u, \qquad v_1 = u_1, \qquad \mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(u), \qquad \mathcal{G}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(u_1).$$

La seconde se traduira par les équations

$$\begin{aligned}
(1-u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du &= (1-v_1^2)\,\mathcal{G}_1(v_1)\,dv_1,\\
(1-u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 &= (1-v^2)\,\mathcal{G}(v)\,dv,\\
(1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du &= -(1+v_1^2)\,\mathcal{G}_1(v_1)\,dv_1,\\
(1+u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 &= -(1+v^2)\,\mathcal{G}(v)\,dv,\\
u\,\mathcal{F}(u)\,du &= v_1\,\mathcal{G}_1(v_1)\,dv_1,\\
u_1\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 &= v\,\mathcal{G}(v)\,dv,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$v_1 = -\frac{1}{u}, \qquad v = -\frac{1}{u_1},$$

$$\mathcal{G}_1(v_1) = -\frac{1}{v_1^4}\mathcal{F}\left(-\frac{1}{v_1}\right), \qquad \mathcal{G}(v) = -\frac{1}{v^4}\mathcal{F}_1\left(-\frac{1}{v}\right).$$

Si l'on se borne aux surfaces réelles, on voit qu'à une même surface minima on peut faire correspondre les deux fonctions

$$\mathcal{F}(u) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{u^4}\mathcal{F}_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

qui sont différentes en général. Nous aurons à revenir sur ce point très important, pour l'étudier d'une manière détaillée.

CHAPITRE III.

LES SURFACES MINIMA EN COORDONNÉES TANGENTIELLES.

Formules relatives au plan tangent et à la normale. — Nouvelle méthode d'intégration de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. — Équation de ces surfaces en coordonnées tangentielles ordinaires. — Détermination des fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ quand la surface est donnée seulement par son équation en coordonnées tangentielles. — Lignes de courbure et lignes asymptotiques, théorème de M. Michael Roberts. — Transformation que subissent les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ quand on effectue un changement de coordonnées. — Détermination de toutes les surfaces minima qui sont des surfaces de révolution, des hélicoïdes ou des surfaces spirales.

---

193. Après avoir indiqué les formules qui définissent les points de la surface minima, nous allons étudier celles qui concernent le plan tangent et la normale.

Soient c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale. Ils seront définis par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} c\dfrac{\partial x}{\partial u} + c'\dfrac{\partial y}{\partial u} + c''\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2mm] c\dfrac{\partial x}{\partial u_1} + c'\dfrac{\partial y}{\partial u_1} + c''\dfrac{\partial z}{\partial u_1} = 0. \end{cases}$$

Si l'on remplace les dérivées de x, y, z par leurs valeurs tirées des formules (17) [p. 289], on trouvera, en attribuant un sens déterminé à la normale,

$$(2)\qquad c = \frac{u+u_1}{1+uu_1},\qquad c' = i\frac{u_1-u}{1+uu_1},\qquad c'' = \frac{uu_1-1}{1+uu_1}.$$

Si l'on écrit l'équation du plan tangent sous la forme

$$(3)\qquad (u+u_1)X + i(u_1-u)Y + (uu_1-1)Z + \xi = 0,$$

on aura

$$-\xi = (u+u_1)x + i(u_1-u)y + (uu_1-1)z.$$

En substituant à la place de x, y, z leurs valeurs déduites des

mêmes formules (17), on aura

$$(4)\quad -\xi = \int^{u} (u-\alpha)(1+\alpha u_1)\mathcal{F}(\alpha)d\alpha + \int^{u_1} (u_1-\alpha_1)(1+\alpha_1 u_1)\mathcal{F}_1(\alpha_1)d\alpha_1$$

les intégrales relatives à α et à α_1 devant être prises suivant les mêmes chemins que celles qui se rapportent à u et à u_1. Si, pour ne pas avoir de quadrature, on emploie les formules (18), on trouvera

$$(5)\qquad \xi = 2u_1 f(u) + 2u f_1(u_1) - (1+uu_1)[f'(u)+f_1'(u_1)].$$

194. Les variables u, u_1, ξ constituent ce système particulier de coordonnées tangentielles que nous avons étudié au Chapitre VII du Livre précédent. Avant de continuer, nous montrerons que les formules établies (n° 165), relativement à ce système de coordonnées, permettent de déterminer toutes les surfaces minima par une méthode qui revient, au fond, à celle de Legendre.

Reprenons, en effet, ces équations en y remplaçant α par u, β par u_1. D'après la première des formules (33) [p. 246] qui fait connaître les rayons de courbure de la surface, nous reconnaissons immédiatement que l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima sera

$$(6)\qquad \xi - pu - qu_1 + (1+uu_1)s = 0,$$

p, q, s désignant, suivant l'usage, les dérivées de ξ. Cette équation aux dérivées partielles s'intègre par les procédés réguliers et, en particulier, par la méthode de Laplace; mais on peut encore opérer comme il suit :

Prenons la dérivée seconde du premier membre par rapport à u et à u_1; nous trouverons

$$(1+uu_1)\frac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial u_1} = 0;$$

s sera donc la somme d'une fonction de u et d'une fonction de u_1. D'ailleurs, en différentiant l'équation (6) par rapport à u ou par rapport à u_1, on obtient les deux équations

$$(7)\qquad \begin{cases} r = \left(\dfrac{1}{u} + u_1\right)\dfrac{\partial s}{\partial u}, \\ t = \left(\dfrac{1}{u_1} + u\right)\dfrac{\partial s}{\partial u_1}, \end{cases}$$

qui permettent de calculer r et t quand s est connue. On pourra donc trouver p et q par l'intégration de deux différentielles à deux variables.

Écrivons s sous la forme

$$s = f'(u) - uf''(u) + f_1'(u_1) - u_1 f_1''(u_1); \tag{8}$$

nous aurons, en vertu des équations (7),

$$\left\{\begin{aligned} r &= -(1 - uu_1) f'''(u), \\ t &= -(1 + uu_1) f_1'''(u_1) \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et, par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned} p &= \int (r\,du + s\,du_1) \\ &= 2f_1(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + u_1 f'(u) - (1 + uu_1) f''(u) \\ q &= \int (s\,du + t\,du_1) \\ &= 2f(u) - uf'(u) + uf_1'(u_1) - (1 + uu_1) f_1''(u_1). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Il est inutile d'ajouter aux valeurs de p et de q des constantes que l'on peut toujours supposer réunies à $f(u)$ et $f_1(u_1)$. Si l'on porte ces valeurs de p et de q, jointes à celles de s, dans l'équation (6), on retrouve précisément la valeur de ξ donnée par la formule (5).

193. L'équation (5) doit être regardée comme l'équation de la surface, écrite dans un système particulier de coordonnées tangentielles; mais, si l'on prend l'équation du plan tangent sous sa forme la plus générale,

$$UX + VY + WZ + P = 0,$$

on peut aussi obtenir la relation entre U, V, W, P, qui caractérise les surfaces minima.

En identifiant l'équation précédente avec la suivante

$$X(u + u_1) + iY(u_1 - u) + Z(uu_1 - 1) + \xi = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\frac{U}{u + u_1} = \frac{V}{i(u_1 - u)} = \frac{W}{uu_1 - 1} = \frac{P}{\xi} = \frac{\pm\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}{uu_1 + 1}$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{U + iV}{H - W}, \qquad u_1 = \frac{U - iV}{H - W}, \qquad \xi = \frac{2P}{H - W},$$

H désignant le radical

$$H = \pm\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (5), nous trouverons

$$P = (U - iV) f\left(\frac{U + iV}{H - W}\right)$$
$$+ (U + iV) f_1\left(\frac{U - iV}{H - W}\right) - H\left[f'\left(\frac{U + iV}{H - W}\right) + f'_1\left(\frac{U - iV}{H - W}\right)\right].$$

Si l'on suppose la surface réelle, les fonctions f et f_1 seront imaginaires conjuguées. Posons

$$f\left(\frac{U + iV}{H - W}\right) = F_1 + iF_2,$$

F_1 et F_2 étant la partie réelle et la partie imaginaire de f. On obtiendra, par un calcul facile, l'équation

$$(11) \qquad P = -2H^3 \frac{\partial}{\partial W}\left[\frac{UF_1 + VF_2}{H(W + H)}\right],$$

d'où les imaginaires ont complètement disparu. On peut aussi employer la forme

$$(12) \qquad P = 2UF_1 + 2VF_2 - 2(U^2 + V^2 + W^2)\left(\frac{\partial F_1}{\partial U} + \frac{\partial F_2}{\partial V}\right),$$

qui a été donnée par M. Weierstrass (article cité, p. 625).

Supposons, par exemple,

$$f(u) = u^3;$$

on aura

$$F_1 = \frac{U^3 - 3UV^2}{(H - W)^3}, \qquad F_2 = \frac{-V^3 + 3VU^2}{(H - W)^3};$$
$$P = -2H^3 \frac{\partial}{\partial W}\left[\frac{U^2 - V^2}{H(H - W)^2}\right] = \frac{2W - 4H}{(H - W)^2}(U^2 - V^2).$$

Pour $f(u) = u^m$, on aurait

$$P = \frac{(1 - m)H + W}{(H - W)^{m-1}}[(U + Vi)^{m-1} + (U - Vi)^{m-1}].$$

196. Nous présenterons encore une remarque sur l'équation en coordonnées tangentielles des surfaces minima. Écrivons-la avec les variables u, u_1, ξ; les formules (9) nous permettront sans difficulté d'obtenir les fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ relatives à la surface. On aura

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}(u) &= f'''(u) = \frac{-r}{1+uu_1}, \\ \mathfrak{F}_1(u_1) &= f_1'''(u_1) = \frac{-t}{1+uu_1}; \end{aligned}\right.$$

il suffira donc de calculer les dérivées secondes r et t et d'éliminer ξ au moyen de l'équation de la surface pour obtenir les équations qui donnent les deux fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$.

Considérons, par exemple, l'hélicoïde

$$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

dont l'équation en coordonnées tangentielles est

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{W}} = \operatorname{arc\,tang} \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}};$$

si l'on remplace U, V, W, P par leurs expressions en fonction des variables u, u_1, ξ, elle deviendra

$$\xi = (uu_1 - 1) \operatorname{arc\,tang} i \frac{u+u_1}{u-u_1} = \frac{uu_1 - 1}{2}\, i\mathrm{L}\left(\frac{u}{u_1}\right).$$

On aura ici

$$r = \frac{i(1+uu_1)}{2u^2}, \qquad t = \frac{-i(1+uu_1)}{2u_1^2}$$

et, par conséquent,

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{-i}{2u^2}, \qquad \mathfrak{F}_1(u_1) = \frac{i}{2u_1^2}.$$

La détermination des fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$ correspondantes à une surface minima donnée peut aussi être obtenue, mais d'une manière moins simple.

La combinaison des formules (5) et (10) nous donne la relation nouvelle

$$\begin{aligned} q(1+uu_1) - \xi u = {} & 2f(u) - 2u^2 f_1(u_1) \\ & + 2u(1+uu_1) f_1'(u_1) - (1+uu_1)^2 f_1''(u_1). \end{aligned}$$

Si l'on donne à u_1 une valeur constante quelconque a_1, le second membre devient égal à $2f(u)$ augmenté d'un polynôme du second degré en u. On aura donc

$$f(u) = \left[\frac{q(1+uu_1)-\xi u}{2}\right]_{u_1=a_1} + \mathrm{P}(u),$$

P désignant un polynôme du second degré en u.

De même, on pourra prendre

$$f_1(u_1) = \left[\frac{p(1+uu_1)-\xi u_1}{2}\right]_{u=a} + \mathrm{P}_1(u_1).$$

Écrivons P et P_1 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(u) &= \mathrm{A}(1-u^2) + \mathrm{B}i(1+u^2) + 2\mathrm{C}u, \\ \mathrm{P}_1(u_1) &= \mathrm{A}_1(1-u_1^2) - \mathrm{B}_1 i(1+u^2) + 2\mathrm{C}_1 u_1. \end{aligned}$$

En substituant les expressions de $f(u)$ et de $f_1(u_1)$ dans l'expression de ξ donnée par la formule (5), on trouvera un résultat de la forme

$$\begin{aligned} \theta(u, u_1, a, a_1) = {} & 2(\mathrm{A}+\mathrm{A}_1)(u+u_1) \\ & + 2(\mathrm{B}+\mathrm{B}_1)i(u_1-u) + 2(\mathrm{C}+\mathrm{C}_1)(uu_1-1), \end{aligned}$$

où le premier membre sera complètement connu. Cette identité permet évidemment de déterminer, autant qu'elles peuvent l'être (n° 191), les constantes A, A_1, ... et par suite les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$. S'il s'agit d'une surface réelle, on pourra supposer a et a_1 imaginaires conjugués et prendre

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{C}_1 = \mathrm{C};$$

les valeurs de A, B, C seront alors réelles.

En appliquant cette méthode à l'hélicoïde, on obtiendra les expressions suivantes :

$$f(u) = \frac{ui}{2}\mathrm{L}u, \qquad f_1(u_1) = -\frac{u_1 i}{2}\mathrm{L}u_1,$$

pour l'un des systèmes de valeurs de $f(u)$ et de $f_1(u_1)$.

197. L'équation en coordonnées tangentielles obtenue pour les surfaces minima conduit à la détermination la plus simple des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de ces surfaces.

Lorsqu'on emploie les variables u, u_1, ξ, l'équation différentielle des lignes de courbure prend la forme (n° 165)

$$r\,du^2 - t\,du_1^2 = 0.$$

Remplaçons r, t par leurs valeurs (9) et nous aurons

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 - \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

Les lignes de courbure s'obtiennent donc par des quadratures et ont pour équation

$$(14)\qquad \int\sqrt{\mathfrak{F}(u)}\,du \pm \int\sqrt{\mathfrak{F}_1(u_1)}\,du_1 = \text{const.}$$

Si l'on écrit

$$\mathfrak{F}(u)\frac{du}{du_1} = \sqrt{\mathfrak{F}(u)\mathfrak{F}_1(u_1)},$$

cette équation déterminera le signe qu'il faut attribuer au radical pour chacune des lignes de courbure et les formules (33) [p. 246] nous donneront les coordonnées X, Y, Z du centre de courbure et le rayon principal R correspondant à la ligne de courbure considérée. On a ainsi

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} 2R &= (1+uu_1)^2\sqrt{\mathfrak{F}(u)\mathfrak{F}_1(u_1)},\\ Z &= z + \frac{u^2u_1^2-1}{2}\sqrt{\mathfrak{F}(u)\mathfrak{F}_1(u_1)},\\ X - iY &= x - iy + u_1(1+uu_1)\sqrt{\mathfrak{F}(u)\mathfrak{F}_1(u_1)},\\ X + iY &= x + iy + u\,(1+uu_1)\sqrt{\mathfrak{F}(u)\mathfrak{F}_1(u_1)}, \end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires du point de la surface.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques s'obtient également sans difficulté, soit avec les coordonnées ponctuelles, soit avec les coordonnées tangentielles. Si l'on emploie, par exemple, l'équation (35) que nous avons donnée [p. 246] relativement au système (u, u_1, ξ)

$$(1+uu_1)(r\,du^2 + 2s\,du\,du_1 + t\,du_1^2) + 2\,du\,du_1(\xi - pu - qu_1) = 0,$$

le coefficient de $du\,du_1$ sera nul en vertu de l'équation aux dérivées partielles de la surface, et il restera

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 + \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

On voit que les lignes asymptotiques se déterminent encore par des quadratures ([1]).

On a pour leur équation en termes finis

$$(16) \qquad \int \sqrt{\mathfrak{F}(u)}\,du \pm i\int \sqrt{\mathfrak{F}_1(u_1)}\,du_1 = \text{const.},$$

et les quadratures sont celles qui figurent déjà dans l'équation des lignes de courbure.

Pour obtenir des surfaces minima algébriques dont les lignes de courbure et les lignes asymptotiques soient algébriques, il suffira donc de connaître deux fonctions algébriques $f(u)$, $f_1(u_1)$ telles que les quadratures suivantes

$$\int \sqrt{f'''(u)}\,du, \qquad \int \sqrt{f_1'''(u_1)}\,du_1$$

soient aussi algébriques.

Lorsque la surface est réelle, les équations des lignes de courbure peuvent s'écrire

$$\mathcal{R}\int \sqrt{\mathfrak{F}(u)}\,du = \text{const.}, \qquad \mathcal{R}\, i\int \sqrt{\mathfrak{F}(u)}\,du = \text{const.},$$

et celles des lignes asymptotiques

$$\mathcal{R}\int \sqrt{i\,\mathfrak{F}(u)}\,du = \text{const.}, \qquad \mathcal{R}\int \sqrt{-\,i\,\mathfrak{F}(u)}\,du = \text{const.}$$

198. Les formules relatives aux coordonnées tangentielles permettent de résoudre simplement une question essentielle et de reconnaître comment se transforment les fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$, $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ quand on effectue un changement de coordonnées ou, ce qui est la même chose, quand on déplace la surface en conservant les axes.

Supposons d'abord que l'on soumette la surface à une translation dont les composantes soient λ, μ, ν. L'équation du plan

---

([1]) La détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques est due à M. Michael Roberts qui l'a donnée dans un Mémoire *Sur la surface dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés,* inséré en 1846 au *Journal de Liouville,* t. XI, 1[re] série, p. 300. Ce beau travail contient aussi des recherches sur l'aire de la surface ainsi que sur la surface minima réglée laplus générale.

tangent

$$(u+u_1)X+i(u_1-u)Y+(uu_1-1)Z+\xi=0$$

deviendra

$$(u+u_1)X+i(u_1-u)Y+(uu_1-1)Z+\xi'=0,$$

ξ' ayant pour valeur (n° 167)

$$\xi'=\xi-\lambda(u+u_1)-i\mu(v_1-u)-\nu(uu_1-1).$$

On obtiendra cette nouvelle valeur de ξ' en substituant aux fonctions $f(u)$, $f_1(u_1)$ les suivantes

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}\varphi(u)&=f(u)-\frac{\lambda}{4}(1-u^2)-\frac{i\mu}{4}(1+u^2)-\frac{\nu u}{2},\\ \varphi_1(u_1)&=f_1(u_1)-\frac{\lambda}{4}(1-u_1^2)+\frac{i\mu}{4}(1+u_1^2)-\frac{\nu u_1}{2},\end{aligned}\right.$$

qui sont imaginaires conjuguées si $f(u)$, $f_1(u_1)$ le sont aussi. Les valeurs des fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ ne seront pas changées, comme cela était évident *a priori*.

Imaginons maintenant que l'on imprime à la surface une rotation quelconque autour de l'origine des coordonnées. Un point quelconque M de la surface viendra occuper une certaine position M'. Soit

$$(v+v_1)X+i(v_1-v)Y+(vv_1-1)Z+\xi'=0$$

l'équation du plan tangent en M'. On aura (n° 167)

$$(18)\qquad u=\frac{mv+n}{m_0-n_0v},\qquad u_1=\frac{m_0v_1+n_0}{m-nv_1},$$

$$(19)\qquad \xi=\xi'\frac{mm_0+nn_0}{(m-nv_1)(m_0-n_0v)}.$$

Si l'on désigne par $g(v)$, $g_1(v_1)$ les fonctions analogues à $f(u)$, $f_1(u_1)$ et relatives à la surface déplacée, ξ' aura pour expression

$$\xi'=2v_1g(v)+2vg_1(v_1)-(1+vv_1)[g'(v)+g'_1(v_1)],$$

et l'on aura à déterminer $g(v)$, $g_1(v_1)$ par la condition

$$\begin{aligned}&\{2u_1f(u)+2uf_1(u_1)-(1+uu_1)[f'(u)+f'_1(u_1)]\}\frac{(m-nv)(m_0-n_0v_1)}{mm_0+nn_0}\\ &\quad=2v_1g(v)+2vg_1(v_1)-(1+vv_1)[g'(v)+g'_1(v_1)].\end{aligned}$$

Pour déduire de cette équation les expressions des fonctions $g(v)$, $g_1(v_1)$, on pourrait appliquer la méthode générale du n° **196**; mais, avec quelque attention, on aperçoit la solution suivante

$$g(v) = \frac{f(u)}{\delta}(m_0 - n_0 v)^2,$$

$$g_1(v_1) = \frac{f_1(u_1)}{\delta}(m - n v_1)^2,$$

où δ désigne le déterminant de la substitution

$$\delta = m m_0 + n n_0,$$

et que l'on vérifiera aisément. Si l'on remplace u et u_1 par leurs expressions en v, v_1, on aura

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} g(v) &= \frac{(m_0 - n_0 v)^2}{\delta} f\left(\frac{mv + n}{m_0 - n_0 v}\right), \\ g_1(v_1) &= \frac{(m - n v_1)^2}{\delta} f_1\left(\frac{m_0 v_1 + n_0}{m - n v_1}\right). \end{aligned} \right.$$

199. La question que nous nous étions proposée est ainsi complètement résolue; car, pour obtenir les résultats relatifs au déplacement le plus général, il suffira de considérer ce déplacement comme résultant d'une translation quelconque et d'une rotation autour de l'origine des coordonnées, et d'appliquer successivement les formules (17) et (20). Il nous reste seulement à examiner ce que deviennent les fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ après le déplacement le plus général et, pour cela, il suffira de différentier trois fois par rapport à v ou à v_1 les équations précédentes (20). On obtient ainsi, en désignant par $\mathcal{G}(v)$, $\mathcal{G}_1(v_1)$ les dérivées $g'''(v)$, $g_1'''(v_1)$, les équations suivantes

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}(v) &= \frac{\delta^2}{(m_0 - n_0 v)^4}\mathcal{F}(u) = \frac{\delta^2}{(m_0 - n_0 v)^4}\mathcal{F}\left(\frac{mv + n}{m_0 - n_0 v}\right), \\ \mathcal{G}_1(v_1) &= \frac{\delta^2}{(m - n v_1)^4}\mathcal{F}_1(u_1) = \frac{\delta^2}{(m - n v_1)^4}\mathcal{F}_1\left(\frac{m_0 v_1 + n_0}{m - n v_1}\right), \end{aligned} \right.$$

qui font connaître de la manière la plus simple la forme nouvelle des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$. Il est aisé d'en déduire quelques relations qui serviront de vérification à nos calculs.

Si l'on tient compte de l'identité

$$1 + uu_1 = \frac{\delta(1 + vv_1)}{(m_0 - n_0 v)(m - n v_1)},$$

on déduira des formules précédentes la relation

$$(1 + vv_1)^4 \mathcal{G}(v)\mathcal{G}_1(v_1) = (1 + uu_1)^4 \mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1),$$

que nous aurions pu écrire *a priori*, puisque chacun des deux membres doit représenter quatre fois le carré du rayon de courbure principal.

D'autre part, on a

$$\frac{du}{dv} = \frac{\delta}{(m_0 - n_0 v)^2}, \qquad \frac{du_1}{dv_1} = \frac{\delta}{(m - n v_1)^2};$$

par conséquent les formules (21) conduisent aux relations suivantes

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}(u)\,du^2 = \mathcal{G}(v)\,dv^2, \\ \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1^2 = \mathcal{G}_1(v_1)\,dv_1^2, \end{cases}$$

et l'on reconnaît ainsi que les équations différentielles (14) et (16) des lignes de courbure et des lignes asymptotiques ne subissent aucun changement de forme lorsqu'on effectue la transformation.

200. Nous allons donner une application des résultats précédents en cherchant toutes les surfaces minima qui sont en même temps des hélicoïdes ou des surfaces de révolution. Il suffira évidemment d'exprimer qu'il existe un déplacement hélicoïdal continu dans lequel la surface cherchée ne cesse pas de coïncider avec elle-même. Prenons pour axe des z l'axe de ce déplacement qui est aussi celui de l'hélicoïde. Si l'on fait tourner la surface d'un angle fini θ autour de cet axe, les formules (18) prendront ici la forme très simple

$$u = ve^{-i\theta}, \qquad u_1 = v_1 e^{i\theta},$$

qui convient à ce déplacement (n° 28) et l'on aura

$$m = e^{-i\frac{\theta}{2}}, \qquad n = 0, \qquad m_0 = e^{i\frac{\theta}{2}}, \qquad n_0 = 0.$$

En substituant ces valeurs des constantes dans les formules (21), on trouvera

$$(23) \qquad \mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(ve^{-i\theta})e^{-2i\theta}, \qquad \mathcal{G}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(v_1 e^{i\theta})e^{2i\theta},$$

et ces expressions de $\mathcal{G}(v)$, $\mathcal{G}_1(v_1)$ ne seront pas changées si l'on imprime à la surface dans sa nouvelle position la translation parallèle à l'axe des z qui l'amène à coïncider avec sa position primitive. On devra donc avoir

$$\mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(v), \qquad \mathcal{G}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(v_1);$$

par suite, $\mathcal{F}(v)$, $\mathcal{F}_1(v_1)$ devront satisfaire respectivement aux équations fonctionnelles

$$\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(ve^{-i\theta})e^{-2i\theta}, \qquad \mathcal{F}_1(v_1) = \mathcal{F}_1(v_1 e^{i\theta})e^{2i\theta},$$

et cela, pour toutes les valeurs de θ.

Ces équations expriment que les produits $v^2\mathcal{F}(v)$, $v_1^2\mathcal{F}_1(v_1)$ demeurent invariables quand on y remplace v, v_1 respectivement par $ve^{-i\theta}$, $v_1 e^{i\theta}$ et sont, par conséquent, constants. On pourra donc poser

$$\mathcal{F}(u) = \frac{ae^{i\alpha}}{u^2}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = \frac{ae^{-i\alpha}}{u_1^2}, \tag{24}$$

a et α désignant deux constantes qui seront réelles si la surface est réelle.

Les hélicoïdes qui correspondent à ces valeurs de $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ sont ceux qui ont été obtenus par M. Scherk et dont nous avons donné l'équation au n° **180**. Nous les retrouverons plus loin. La surface minima de révolution, qui est l'alysséide déjà étudiée au n° **66**, correspond à la valeur o de α; l'hélicoïde gauche à plan directeur correspond (n° **196**) à la valeur $\frac{\pi}{2}$ de la même constante.

201. Cherchons encore toutes les surfaces minima qui rentrent dans la classe des *surfaces spirales* signalées au n° **89** et découvertes par M. Maurice Lévy. Ces surfaces, nous l'avons vu, jouissent de la propriété de reprendre leur position initiale si on les fait tourner d'un angle quelconque θ autour de leur axe et si on les soumet ensuite à une transformation homothétique dont le pôle est sur cet axe et pour laquelle le rapport de similitude est $e^{a\theta}$, a désignant une constante. Si l'on a pris pour axe des z l'axe de la surface, il faudra donc que la fonction $\mathcal{G}(v)$ relative à la position nouvelle que prend cette surface, après la rotation d'angle

θ, soit égale à

$$\mathcal{F}(v)e^{a\theta}.$$

En appliquant ici les formules (23), on aura l'équation fonctionnelle

$$e^{a\theta}\mathcal{F}(v) = \mathcal{F}(ve^{-i\theta})e^{-2i\theta}.$$

Posons

$$\mathcal{F}(v) = \frac{\lambda(v)}{v^m},$$

on devra avoir

$$\lambda(v)e^{a\theta} = \lambda(ve^{-i\theta})e^{-2i\theta}e^{mi\theta},$$

Si donc on prend

$$m = 2 - ai,$$

il viendra

$$\lambda(v) = \lambda(ve^{-i\theta}),$$

et, par conséquent, $\lambda(v)$ sera une constante.

On a donc

$$(25) \qquad \mathcal{F}(v) = (A + Bi)v^{-2+ai};$$

on trouvera de même

$$(26) \qquad \mathcal{F}_1(v_1) = (A - Bi)v_1^{-2-ai}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'à ces expressions des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ correspond une surface qui jouit effectivement des propriétés que nous avons recherchées. Si l'on suppose $a = 0$, on retrouve, comme il fallait s'y attendre, les hélicoïdes du numéro précédent.

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATIONS CONFORMES DES SURFACES MINIMA.

Élément linéaire de la surface minima et de sa représentation sphérique. — La représentation sphérique réalise un tracé géographique de la surface minima sur la sphère. — Problème de Minding. — Tracé géographique sur le plan dans lequel les lignes de courbure sont représentées par les droites parallèles aux axes. — Théorème de Bour. — Recherche des surfaces minima à lignes de courbure planes. — Surface de M. O. Bonnet. — Surface de M. Enneper. — Formes diverses de l'élément linéaire. — Représentations planes de la surface indiquées par Riemann.

---

202. Les résultats obtenus dans les Chapitres précédents conduisent à un grand nombre de conséquences. Nous allons développer d'abord celles qui concernent les différentes représentations de la surface.

Les formules (17) [p. 289] nous donnent d'abord pour l'élément linéaire de la surface l'expression suivante

$$ds^2 = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u) \mathcal{F}_1(u_1)\, du\, du_1, \tag{1}$$

à laquelle nous joindrons celle qui détermine l'élément linéaire de la représentation sphérique

$$d\sigma^2 = dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = \frac{4\, du\, du_1}{(1 + uu_1)^2}. \tag{2}$$

La comparaison de cés formules met en évidence une proposition du plus haut intérêt, due à M. O. Bonnet : *La représentation sphérique de la surface minima réalise une représentation conforme, un tracé géographique de la surface sur la sphère.*

Il est aisé de démontrer que cette propriété caractérise les surfaces minima : *Toute surface autre que la sphère, pour laquelle l'angle de deux courbes est égal à celui de leurs représentations sphériques, est nécessairement une surface minima.* Cela résulte immédiatement de la proposition énoncée

au n° 142. Nous avons vu que, si l'on considère une courbe passant en un point M de la surface et y admettant une tangente MT, elle a pour représentation sphérique une courbe qui passe au point m, image de M, en y admettant pour tangente une droite perpendiculaire à la tangente conjuguée de MT. Il suit de là que, si deux courbes issues du point M y admettent les deux tangentes MT, MT', l'angle de leurs représentations sphériques en m sera égal à celui des tangentes MU, MU' conjuguées de MT, MT'. L'indicatrice de la surface cherchée doit donc être une courbe telle que l'angle de deux quelconques de ses diamètres soit égal à celui des diamètres conjugués. Cette propriété n'appartient qu'au cercle et à l'hyperbole équilatère; la surface cherchée ne peut donc être qu'une sphère ou une surface minima.

Plus généralement, s'il existe sur une surface un système orthogonal admettant pour représentation sphérique un système orthogonal et ne se confondant pas avec celui qui est formé par les lignes de courbure, on arrivera à la même conclusion. Car l'hyperbole équilatère est la seule conique pour laquelle deux diamètres rectangulaires ne se confondant pas avec les axes puissent admettre comme conjugués deux diamètres rectangulaires.

203. Imaginons, d'après cela, qu'étant donné un système orthogonal (S) quelconque tracé sur la sphère de rayon 1, on propose de trouver toutes les surfaces (Σ) telles que, si l'on effectue leur représentation sphérique sur la sphère précédente, les courbes de la surface qui correspondent à celles du système sphérique orthogonal (S) forment un système (S') également orthogonal. Le problème ainsi posé sera susceptible d'une double solution : ou bien le système (S') sera formé des lignes de courbure de la surface et alors la question sera ramenée à la suivante sur laquelle nous avons déjà donné quelques indications (n° 162) : *Trouver les surfaces dont les lignes de courbure admettent pour image sphérique les courbes d'un système orthogonal donné;* ou bien le système (S) ne sera pas formé des lignes de courbure et, dans ce cas, la surface devra être une surface minima qui sera d'ailleurs quelconque.

Les remarques précédentes expliquent certains résultats obtenus

par Minding dans un travail (¹) publié en 1852. Ce savant géomètre commence par généraliser et étendre à une surface quelconque la notion des méridiens et des parallèles. Les méridiens sont les courbes pour lesquelles la normale à la surface est parallèle à un plan vertical fixe; les parallèles sont les courbes pour lesquelles le plan tangent fait un angle constant avec le plan horizontal. En d'autres termes, dans la représentation sphérique de la surface, les méridiens et les parallèles de la surface, tels que nous venons de les définir, correspondent aux méridiens et aux parallèles de la sphère. Minding se propose de rechercher toutes les surfaces sur lesquelles les méridiens et les parallèles forment un système orthogonal, et il obtient deux classes bien distinctes de surfaces satisfaisant aux conditions posées. Les unes sont les surfaces-moulures déjà étudiées par Monge, les autres sont les surfaces minima. Ces résultats sont une conséquence directe des remarques qui précèdent; et nous pouvons ajouter que, sur toute surface minima, le réseau formé par les méridiens et les parallèles sera toujours isotherme, car il correspond à un système isotherme de la sphère. C'est ce que les formules (2) [p. 296] nous permettent d'ailleurs de vérifier. Les parallèles seront définis par l'équation

$$c'' = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad uu_1 = \text{const.},$$

et les méridiens par l'équation

$$\frac{c}{c'} = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad \frac{u}{u_1} = \text{const.}$$

Si donc on fait

$$u = \rho e^{i\omega}, \qquad u_1 = \rho e^{-i\omega},$$

l'élément linéaire de la surface aura pour expression

$$ds^2 = (1+\rho^2)\,\mathfrak{F}(\rho e^{i\omega})\,\mathfrak{F}_1(\rho e^{-i\omega})(d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2).$$

Les courbes $\rho = \text{const.}$ sont les parallèles; les courbes $\omega = \text{const.}$ les méridiens de la surface, et l'expression de l'élément linéaire

(¹) Minding, *Ueber einige Grundformeln der Geodäsie* (*Journal de Crelle*, t. XLIV, p. 66; 1852).

montre bien que ces deux familles de courbes constituent un système isotherme.

En particulier, si l'on a

$$\mathcal{F}(u) = A u^m, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = A_1 u_1^m,$$

l'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = AA_1(1+\rho^2)\rho^{2m}[d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2];$$

la surface sera applicable sur une surface de révolution, les méridiens et les parallèles se correspondant respectivement sur les deux surfaces.

204. Nous allons maintenant faire connaître d'autres représentations conformes de la surface minima qui ont été indiquées par Riemann dans un Mémoire important sur lequel nous aurons à revenir (¹).

Faisons correspondre au point (u, u_1) de la surface le point d'un plan dont les coordonnées rectangulaires x_1, y_1 sont déterminées par les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 + iy_1 = \int \sqrt{2\mathcal{F}(u)}\, du, \\ x_1 - iy_1 = \int \sqrt{2\mathcal{F}_1(u_1)}\, du_1. \end{cases}$$

Il résulte immédiatement des formules (22), établies au n° **199**, que cette correspondance est indépendante de l'orientation de la surface. C'est ce que mettront d'ailleurs en évidence les propositions que nous allons obtenir.

L'élément linéaire de la surface, déterminé par la formule (1), prendra la forme

$$(4) \qquad ds^2 = \frac{1}{2}(1+uu_1)^2\sqrt{\mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1)}(dx_1^2 + dy_1^2) = R(dx_1^2 + dy_1^2),$$

R désignant le rayon de courbure principal déterminé par la pre-

(¹) Riemann, *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung* (*Œuvres complètes*, p. 283, et t. XIII des *Mémoires de la Société Royale de Gœttingue*, 1867).

mière formule (15) [p. 302]. L'élément linéaire $d\sigma$ de la représentation sphérique aura de même pour expression

$$(5) \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{R}(dx_1^2 + dy_1^2).$$

La première de ces deux formules démontre la propriété que nous avons annoncée. La représentation de la surface minima sur le plan constitue un tracé géographique de la surface, et, si nous nous reportons aux équations (14) et (16) du Chapitre précédent [p. 302 et 303], nous reconnaissons immédiatement que, dans ce tracé géographique de la surface minima, les lignes de courbure sont représentées par les droites

$$x_1 = \text{const.}, \qquad y_1 = \text{const.},$$

parallèles aux axes, et les lignes asymptotiques par les droites

$$x_1 + y_1 = \text{const.}, \qquad x_1 - y_1 = \text{const.},$$

parallèles aux bissectrices de ces axes.

Les formules (4) et (5) mettent encore en évidence une proposition intéressante, que l'on peut d'ailleurs rattacher à celles qui concernent le tracé géographique de la surface minima sur la sphère : *Les lignes de courbure qui forment, sur la surface, un système isotherme, admettent pour représentation sphérique un système qui est aussi isotherme.* Mais cette propriété, prise dans son énoncé le plus général, ne caractérise nullement les surfaces minima, elle appartient aussi, par exemple, aux surfaces de révolution et aux surfaces du second degré (n° 121).

205. On obtient d'autres propositions qui méritent d'être signalées en introduisant dans les formules les deux fonctions

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha = x_1 + iy_1, \\ \beta = x_1 - iy_1. \end{cases}$$

On aura alors

$$(7) \qquad \begin{cases} u = f(\alpha) = A, & u_1 = \varphi(\beta) = B, \\ \mathcal{F}(u) = \dfrac{1}{2A'^2}, & \mathcal{F}_1(u_1) = \dfrac{1}{2B'^2}, \end{cases}$$

A′, B′ désignant les dérivées des fonctions A et B; et les éléments linéaires ds et $d\sigma$ auront pour expressions nouvelles

$$(8)\qquad ds^2 = \frac{(1+AB)^2\, d\alpha\, d\beta}{4A'B'}, \qquad d\sigma^2 = \frac{4A'B'\, d\alpha\, d\beta}{(1+AB)^2}.$$

De là résulte le théorème suivant :

Si l'on a mis, d'une manière quelconque, l'élément linéaire de la sphère sous la forme

$$d\sigma^2 = \lambda\, d\alpha\, d\beta,$$

l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda}\, d\alpha\, d\beta$$

sera celui d'une surface minima pour laquelle $\alpha+\beta$ *et* $\alpha-\beta$ *seront les paramètres des lignes de courbure,*

qui a été énoncé, pour la première fois, par Bour (¹) et qui résulte aussi des belles recherches de M. Weingarten, sur lesquelles nous aurons à revenir, pour les exposer dans tous leurs détails.

Introduisons dans les formules de M. Weierstrass les notations nouvelles définies par les équations (6) et (7); ces formules se changeront dans les suivantes

$$(9)\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{1-A^2}{4A'}\, d\alpha + \int \frac{1-B^2}{4B'}\, d\beta, \\ y = i\displaystyle\int \frac{1+A^2}{4A'}\, d\alpha - i\int \frac{1+B^2}{4B'}\, d\beta, \\ z = \displaystyle\int \frac{A}{2A'}\, d\alpha + \int \frac{B}{2B'}\, d\beta, \end{cases}$$

qui, sous cette forme, ont été données par Enneper en 1864, dans l'article cité plus haut (²). Si on les rapproche du théorème de Bour, elles permettent de déterminer les surfaces minima admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un système isotherme donné de la sphère. En effet, si ce système iso-

(¹) BOUR, *Théorie de la déformation des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXᵉ Cahier, p. 118-119; 1862).

(²) Elles se trouvent aussi sous une forme légèrement différente dans le Mémoire de Riemann (*Œuvres complètes*, p. 292).

therme est donné de forme et de position, on connaîtra les fonctions A et B et les formules précédentes donneront la surface minima cherchée. Les surfaces homothétiques s'obtiendront en remplaçant α et β par $m\alpha$ et $m\beta$, m étant une constante.

206. Proposons-nous, par exemple, de trouver les surfaces minima admettant pour représentation sphérique les systèmes isothermes composés de deux familles de cercles. Le plus général de ces systèmes, dans lequel les cercles de chaque famille passent par deux points *distincts*, correspond, avec un choix convenable des axes, aux valeurs suivantes de A et de B,

$$A = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\tang\frac{\alpha}{2}, \qquad B = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\tang\frac{\beta}{2},$$

h désignant une constante réelle inférieure à 1. Les formules précédentes nous donneront alors

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2\sqrt{1-h^2}}[h(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta],\\ y &= \frac{i}{2\sqrt{1-h^2}}[\alpha-\beta+h(\sin\alpha-\sin\beta)],\\ z &= -\frac{1}{2}[\cos\alpha+\cos\beta], \end{aligned}\right.$$

L'élément linéaire de la surface sera déterminé par la formule

$$ds^2 = \frac{1}{1-h^2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + h\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]^2 d\alpha\, d\beta.$$

Si l'on pose

$$\alpha = \lambda + i\mu,$$
$$\beta = \lambda - i\mu,$$

λ et μ seront les paramètres des lignes de courbure. Multiplions par $\sqrt{1-h^2}$; les expressions des coordonnées prendront la forme suivante

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= h\lambda + \sin\lambda\cos i\mu,\\ y &= -\mu + hi\sin i\mu\cos\lambda,\\ z &= \sqrt{1-h^2}\cos\lambda\cos\mu i, \end{aligned}\right.$$

et l'élément linéaire aura pour valeur

$$(12) \qquad ds^2 = [\cos i\mu + h\cos\lambda]^2 (d\lambda^2 + d\mu^2).$$

Ces formules ont été données par M. O. Bonnet [1].

La surface précédente n'a pas encore été étudiée, croyons-nous. Parmi ses propriétés, nous signalerons les suivantes :

La section par le plan des xy se compose d'un nombre illimité de chaînettes toutes égales, ayant leurs bases parallèles à l'axe des y. Ces chaînettes sont des lignes de courbure planes de la surface. Par cette propriété d'avoir pour ligne de courbure une chaînette, qui suffirait, nous le verrons, à la déterminer, la surface se rapproche de l'alysséide qui correspond à l'hypothèse $h = 0$. Mais le plan de la chaînette n'est pas un plan de symétrie de la surface et la coupe sous un angle constant, dont le cosinus est égal à h.

Les lignes de courbure $\mu =$ const. sont des courbes analogues à la cycloïde et dont on obtiendra la forme en projetant une cycloïde allongée sur un plan parallèle à la base de cette courbe. Elles sont définies dans leur plan par deux équations de la forme

$$x = h\lambda + a\sin\lambda,$$
$$y = \sqrt{a^2 - h^2}\cos\lambda,$$

où λ est le paramètre variable, et elles sont rectifiables.

207. Sur une surface quelconque, les lignes de courbure planes sont caractérisées, nous le verrons, par la propriété d'admettre comme représentation sphérique un petit cercle de la sphère. Pour obtenir toutes les surfaces minima à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, il nous suffira donc de joindre à la surface précédente celle qui admet, pour représentation sphérique de ses lignes de courbure, le système particulier de cercles dans lequel les cercles de chaque famille sont tous tangents en un même point et ont pour projection stéréographique deux systèmes de droites rectangulaires [2]. La surface correspondante,

---

(1) *Comptes rendus*, t. XLI, p. 1057; 1855.

(2) Il serait inutile, on le démontre aisément, de rechercher les surfaces minima à lignes de courbure planes dans un seul système. En effet, toute surface minima

qui est comprise comme cas limite dans la précédente, présente les propriétés les plus intéressantes et mérite d'être étudiée d'une manière détaillée. Elle a été signalée par M. Enneper ([1]).

Dans ce cas, il faudra faire

$$A = \alpha, \qquad B = \beta,$$

ou, ce qui est la même chose, remplacer dans les formules de M. Weierstrass $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par une même constante. Prenons cette constante égale à 3. Nous aurons

$$(13) \qquad x = \mathcal{R}(3u - u^3), \qquad y = \mathcal{R}i(3u + u^3), \qquad z = \mathcal{R}3u^2,$$

et si l'on pose

$$u = \alpha - i\beta,$$

α et β seront les paramètres des lignes de courbure.

On a d'abord, en développant les expressions des coordonnées,

$$(14) \qquad \begin{cases} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = 3\beta + 3\alpha^2\beta - \beta^3, \\ z = 3\alpha^2 - 3\beta^2. \end{cases}$$

La surface est algébrique et unicursale. Dans le tracé géographique sur le plan, les sections planes sont représentées par des courbes du troisième degré qui n'ont aucun point commun et, par conséquent, la surface est du neuvième degré.

Les plans des lignes de courbure ont respectivement pour équations

$$(15) \qquad \begin{cases} x + \alpha z - 3\alpha - 2\alpha^3 = 0, \\ y - \beta z - 3\beta - 2\beta^3 = 0. \end{cases}$$

---

admettant pour représentation sphérique de ses lignes de courbure un système orthogonal et isotherme, on serait conduit à rechercher sur la sphère un système isotherme dont une des familles seulement serait composée de cercles. Or, la proposition démontrée au n° 127, relativement aux systèmes isothermes plans dont une famille est composée de cercles, s'étend immédiatement, par une simple inversion, aux systèmes sphériques; et elle nous permet de conclure qu'il n'existe pas sur la sphère de système isotherme dont une seule famille soit formée de cercles. Par suite, il n'existe pas de surface minima à lignes de courbure planes dans un seul système.

([1]) Enneper (A.), *Analytisch-geometrische Untersuchungen* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. IX, p. 108; 1864).

Nous verrons comment on peut les construire géométriquement. Il résulte d'ailleurs des formules (14) que les lignes de courbure sont des courbes unicursales du troisième ordre; et nous allons montrer qu'elles sont *rectifiables*.

En effet, le calcul de l'élément linéaire de la surface nous donne ici

$$ds^2 = 9[1 + \alpha^2 + \beta^2]^2(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et si l'on fait, par exemple, $\beta =$ const., on aura

$$ds = 3(1 + \alpha^2 + \beta^2)\,d\alpha,$$

et, en intégrant,

$$s = 3(1 + \beta^2)\alpha + \alpha^3.$$

Laissant au lecteur le soin de démontrer que les lignes asymptotiques sont à la fois des hélices et des cubiques gauches rectifiables, nous allons chercher ce que devient ici la génération que nous avons donnée au n° 105 pour toutes les surfaces à lignes de courbure planes.

L'équation du plan tangent au point de paramètres α, β prend ici la forme

$$(16) \qquad 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)z + 3\beta^2 - 3\alpha^2 + \beta^4 - \alpha^4 = 0.$$

Si, conformément aux méthodes du n° 101, on l'écrit de la manière suivante :

$$(x - 4\alpha)^2 + y^2 + (z - 2\alpha^2 + 1)^2 - (y - 4\beta)^2 - x^2 - (z + 2\beta^2 - 1)^2 = 0,$$

on voit qu'il est le plan radical des deux sphères de rayon nul

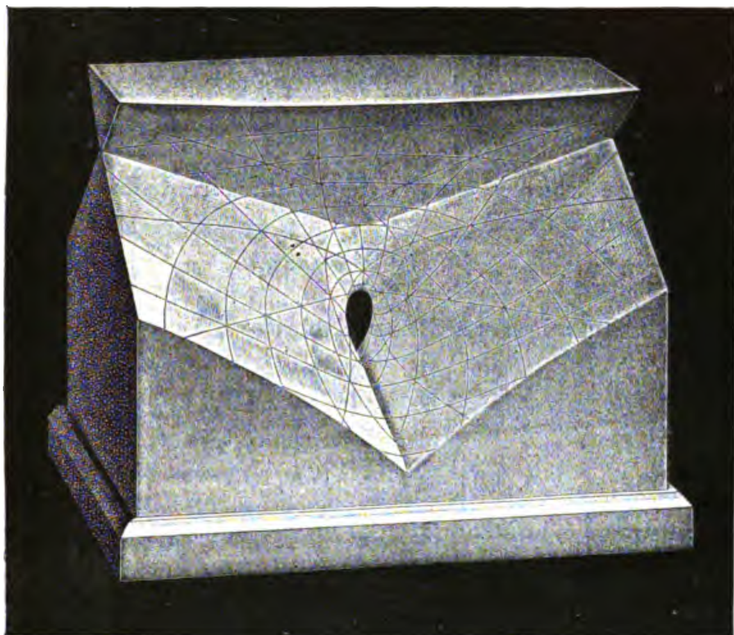
$$(x - 4\alpha)^2 + y^2 + (z - 2\alpha^2 + 1)^2 = 0,$$
$$x^2 + (y - 4\beta)^2 + (z + 2\beta^2 - 1)^2 = 0,$$

dont les centres décrivent deux paraboles qui sont focales l'une de l'autre. L'application du théorème du n° 105 nous donne donc la génération suivante de la surface de M. Enneper :

Considérons dans l'espace deux paraboles qui sont focales l'une de l'autre. La surface est l'enveloppe des plans élevés perpendiculairement sur les milieux des cordes qui joignent les points de l'une des courbes aux points de l'autre. Les plans normaux aux deux paraboles aux extrémités de l'une de ces cordes

sont les plans des lignes de courbure qui passent par le point de contact de la surface et du plan perpendiculaire sur le milieu de la corde. La surface (fig. 14) est ainsi construite par plans et par points.

Fig. 14.



SURFACE MINIMA D'ENNEPER.

(D'après le modèle construit par M. G. Herting et faisant partie de la collection de M. L. Brill, à Darmstadt.)

Le réseau rectangulaire figuré sur la surface est composé des lignes de courbure; les courbes en diagonale sont des lignes asymptotiques.

L'équation du plan tangent nous montre d'ailleurs que, dans le tracé géographique de la surface, les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface sont représentées par des courbes du quatrième ordre ayant, on le reconnaîtra aisément, 10 points communs à l'infini. La classe de la surface sera donc égale à $4^2 - 10$ ou 6.

208. L'application du théorème de Bour conduit, pour l'élément linéaire des surfaces minima, à diverses formes que l'on rencontre

dans les applications et qu'il est bon de connaître. Nous allons les signaler rapidement.

Prenons d'abord l'élément linéaire de la sphère sous la forme

$$d\sigma^2 = \frac{4\,dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

Si l'on remplace x et y par des fonctions A et B de α et de β, on aura

$$d\sigma^2 = \frac{4\,A'B'\,d\alpha\,d\beta}{(A-B)^2}.$$

Par suite, on trouvera, pour l'élément linéaire de la surface minima, la forme

$$ds^2 = \frac{(A-B)^2}{4A'B'}\,d\alpha\,d\beta.$$

En substituant à α et à β les variables

$$\alpha_1 = \int \frac{d\alpha}{2A'}, \qquad \beta_1 = \int \frac{d\beta}{2B'},$$

on aura

$$(17) \qquad ds^2 = (A_1 - B_1)^2\,d\alpha_1\,d\beta_1.$$

Cette forme a été obtenue par M. O. Bonnet et par Bour.

Si l'on emploie la forme

$$d\sigma^2 = \frac{4\,dx\,dy}{(1+xy)^2},$$

pour l'élément linéaire de la sphère, on sera conduit de même à l'expression suivante de l'élément linéaire de la surface minima

$$(18) \qquad ds^2 = (1 + A_1 B_1)^2\,d\alpha_1\,d\beta_1,$$

qui est due à M. Lie.

209. Nous terminerons ce Chapitre en signalant d'autres tracés géographiques de la surface sur lesquels Riemann et M. Beltrami (¹) ont appelé l'attention.

(¹) RIEMANN (B.), *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung* (*Œuvres complètes*, p. 283).

BELTRAMI (E.), *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Bologne*, 2ᵉ série, t. VII, 1868).

Ils reposent sur la propriété suivante : *Les sections de toute surface minima par une série de plans parallèles constituent une famille de courbes isothermes de la surface.*

Employons, par exemple, les formules de M. Weierstrass. Toute fonction linéaire des coordonnées x, y, z d'un point de la surface sera de la forme

$$ax + by + cz = \Phi(u) + \Phi_1(u_1).$$

Par conséquent, les sections de la surface par les plans parallèles

$$ax + by + cz = \text{const.}$$

constituent une des deux familles du système défini par les équations

$$\Phi(u) + \Phi_1(u_1) = \text{const.},$$
$$\Phi(u) - \Phi_1(u_1) = \text{const.},$$

système qui est à la fois isotherme et orthogonal. Si l'on oriente la surface de manière que les plans sécants soient horizontaux, les trajectoires orthogonales deviennent les lignes de plus grande pente de la surface.

Il résulte des remarques développées au Chapitre II que l'on peut, si la surface est donnée, obtenir par des différentiations et des éliminations les fonctions $\Phi(u)$, $\Phi_1(u_1)$. On pourra donc toujours déterminer *sans aucune quadrature* les lignes de plus grande pente de toute surface minima donnée.

Si l'on fait correspondre au point (u, u_1) de la surface le point d'un plan dont les coordonnées rectangulaires x_0, y_0 sont données par les relations

$$x_0 + iy_0 = \Phi(u), \qquad x_0 - iy_0 = \Phi_1(u_1),$$

on aura les tracés géographiques dont nous voulions parler, et pour lesquels une série de sections parallèles de la surface est représentée, sur la carte, par les droites parallèles à l'axe des y, tandis que les droites parallèles à l'axe des x représentent les lignes de plus grande pente de la surface.

Il existe évidemment une infinité de tracés géographiques de ce genre, puisque l'on peut choisir arbitrairement la direction des sections parallèles.

CHAPITRE V.

LA SURFACE ADJOINTE DE M. O. BONNET.

Surfaces minima associées à une surface donnée. — Surface adjointe, formules qui la déterminent. — Formules de M. Schwarz. — Propositions directes et réciproques relatives à l'application et au tracé géographique des surfaces les unes sur les autres. — Proposition de M. Bonnet relative aux lignes de courbure et aux lignes asymptotiques de la surface adjointe. — Détermination de toutes les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée. — Surfaces minima applicables sur une surface de révolution ou sur une surface spirale.

---

210. Considérons une surface minima définie par les formules générales de Monge,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau), \\ y = B(t) + B_1(\tau), \\ z = C(t) + C_1(\tau), \end{cases}$$

où les fonctions A, B, C; A_1, B_1, C_1 satisfont respectivement aux deux conditions

$$(2)\qquad \begin{cases} dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0, \\ dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0. \end{cases}$$

L'élément linéaire de cette surface sera donné par la formule

$$ds^2 = 2(dA\, dA_1 + dB\, dB_1 + dC\, dC_1),$$

par conséquent, il aura la même expression pour toutes les surfaces minima définies par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} x = e^{i\alpha}A(t) + e^{-i\alpha}A_1(\tau), \\ y = e^{i\alpha}B(t) + e^{-i\alpha}B_1(\tau), \\ z = e^{i\alpha}C(t) + e^{-i\alpha}C_1(\tau), \end{cases}$$

où α désigne une constante quelconque. Toutes ces surfaces sont évidemment applicables les unes sur les autres, et les points correspondants sur deux quelconques d'entre elles sont ceux qui sont déterminés par les mêmes valeurs de t et de τ. On recon-

naîtra aisément qu'en ces points les plans tangents aux surfaces sont parallèles.

Nous dirons que les équations (3) définissent une famille de surfaces *associées*. Pour $\alpha = 0$, on retrouve la surface définie par les équations (1); pour $\alpha = \pi$, on obtient la symétrique de cette surface par rapport à l'origine des coordonnées.

Parmi les surfaces associées à une surface donnée, on doit distinguer particulièrement celle qui correspond à la valeur $\frac{\pi}{2}$ de α. Elle est définie par les formules

$$(4)\qquad \begin{cases} x_0 = i[A(t) - A_1(\tau)], \\ y_0 = i[B(t) - B_1(\tau)], \\ z_0 = i[C(t) - C_1(\tau)]. \end{cases}$$

Nous lui donnerons le nom de surface *adjointe* à la proposée. Elle a été découverte par M. O. Bonnet ([1]). Ses relations avec la surface dont elle dérive jouent un rôle essentiel dans la théorie des surfaces minima.

Si, dans les formules (1), on remplace $A(t)$ par $A(t) - im$, $A_1(\tau)$ par $A_1(\tau) + im$, m désignant une constante, la surface primitive ne sera pas changée, mais la valeur de x_0 sera augmentée de $2m$. Comme on peut opérer des changements analogues pour y_0, z_0, on voit que la surface adjointe peut être déplacée parallèlement à elle-même et subir une translation quelconque. Si, d'ailleurs, on échange les termes relatifs à t et à τ, cette surface sera remplacée par sa symétrique relativement à l'origine des coordonnées. Ainsi, la surface adjointe à une surface donnée n'est pas complètement définie de position.

Quand on emploie les formules de M. Weierstrass

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{1-u^2}{2}\mathcal{F}(u)du + \int \frac{1-u_1^2}{2}\mathcal{F}_1(u_1)du_1, \\ y = i\displaystyle\int \frac{1+u^2}{2}\mathcal{F}(u)du - i\int \frac{1+u_1^2}{2}\mathcal{F}_1(u_1)du_1, \\ z = \displaystyle\int u\,\mathcal{F}(u)du \qquad + \int u_1\,\mathcal{F}_1(u_1)du_1, \end{cases}$$

([1]) O. Bonnet, *Note sur la théorie générale des surfaces* (*Comptes rendus*, t. XXXVII, p. 529-532; 1853).

les surfaces associées s'obtiennent en remplaçant $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$, respectivement par $\mathfrak{F}(u)e^{i\alpha}$, $\mathfrak{F}_1(u_1)e^{-i\alpha}$ (1).

En particulier, la surface adjointe est définie par les équations

$$(6)\quad \begin{cases} x_0 = i\int \frac{1-u^2}{2}\mathfrak{F}(u)\,du - i\int\frac{1-u_1^2}{2}\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y_0 = -\int\frac{1+u^2}{2}\mathfrak{F}(u)\,du - \int\frac{1+u_1^2}{2}\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z_0 = i\int u\,\mathfrak{F}(u)\,du \quad - i\int u_1\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \end{cases}$$

qui se déduisent des formules (5) par la substitution de $i\,\mathfrak{F}(u)$ à $\mathfrak{F}(u)$ et de $-i\mathfrak{F}_1(u_1)$ à $\mathfrak{F}_1(u_1)$. A chaque nappe réelle d'une surface minima correspondra évidemment une nappe réelle de la surface adjointe. Si la surface proposée est algébrique, il en sera de même et des surfaces associées, et de la surface adjointe.

211. Quel que soit le système de détermination employé pour les valeurs de x, y, z, x_0, y_0, z_0, les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface associée correspondante à une valeur quelconque de α s'expriment de la manière suivante :

$$(7)\quad \begin{cases} X = x\cos\alpha + x_0\sin\alpha, \\ Y = y\cos\alpha + y_0\sin\alpha, \\ Z = z\cos\alpha + z_0\sin\alpha. \end{cases}$$

En écrivant que le carré de l'élément linéaire de cette surface

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

est indépendant de α, on est conduit aux relations

$$(8)\quad \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2, \\ dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0, \end{cases}$$

qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier. Ainsi, non seulement une surface minima et son adjointe sont applicables l'une sur l'autre et elles ont, comme deux surfaces associées quelconques, la propriété que leurs plans tangents aux points correspondants sont parallèles;

(1) Ce moyen si simple d'obtenir toute une famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée est dû à M. Schwarz qui l'a donné dans l'article déjà cité [p. 280], *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* p. 286.

mais, de plus, les tangentes à deux courbes correspondantes sont toujours perpendiculaires. Nous dirons alors que les éléments correspondants des deux surfaces sont orthogonaux.

212. Avant de continuer l'étude des surfaces associées, nous remarquerons que les formules (8) ont conduit M. Schwarz à un procédé très élégant de détermination de la surface adjointe ([1]). Nous avons déjà démontré que, si une surface minima est donnée par son équation, on peut obtenir par des différentiations et des éliminations, et sans aucune quadrature, les expressions des coordonnées en fonction des variables u, u_1. Ces expressions une fois obtenues

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u) + \varphi_1(u_1), \\ y &= \psi(u) + \psi_1(u_1), \\ z &= \chi(u) + \chi_1(u_1), \end{aligned}$$

on en déduira immédiatement celles qui conviennent à la surface adjointe et qui sont

$$\begin{aligned} x_0 &= i[\varphi(u) - \varphi_1(u_1)], \\ y_0 &= i[\psi(u) - \psi_1(u_1)], \\ z_0 &= i[\chi(u) - \chi_1(u_1)]. \end{aligned}$$

Les formules données par M. Schwarz exigent, au contraire, l'emploi de trois quadratures, mais elles sont de la plus grande élégance et ont des applications très importantes. Nous allons les faire connaître.

Désignons maintenant par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale qui sont définis par les formules déjà données [p. 296]

$$(9) \qquad X = \frac{u + u_1}{1 + uu_1}, \qquad Y = \frac{i(u_1 - u)}{1 + uu_1}, \qquad Z = \frac{uu_1 - 1}{1 + uu_1};$$

x, y, z; x_0, y_0, z_0 désignant les coordonnées de deux points correspondants sur la surface minima donnée et sur la surface adjointe. On aura

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz &= 0, \\ X\,dx_0 + Y\,dy_0 + Z\,dz_0 &= 0. \end{aligned} \right.$$

([1]) SCHWARZ, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* p. 287.

Si l'on joint la dernière des équations précédentes à la seconde des formules (8), on pourra déterminer les rapports mutuels de dx_0, dy_0, dz_0; ce qui donnera

$$\frac{dx_0}{Z\,dy - Y\,dz} = \frac{dy_0}{X\,dz - Z\,dx} = \frac{dz_0}{Y\,dx - X\,dy}.$$

La somme des carrés des numérateurs est égale, en vertu des formules (8) et (10), à la somme des carrés des dénominateurs. La valeur commune des rapports précédents est donc égale à ± 1. Mais, si l'on remplace dans l'un quelconque d'entre eux X, Y, Z, dx, ..., dx_0, ... par leurs valeurs déduites des formules (5), (6) et (9), on obtient -1 pour la valeur commune des trois rapports. On a donc

$$(11)\qquad \begin{cases} dx_0 = Y\,dz - Z\,dy, \\ dy_0 = Z\,dx - X\,dz, \\ dz_0 = X\,dy - Y\,dx; \end{cases}$$

et x_0, y_0, z_0 seront déterminés par l'intégration de ces trois différentielles à deux variables indépendantes, que l'on peut toujours former quand on connaît l'équation de la surface.

Lagrange, nous l'avons vu (n° 175), avait déjà remarqué que l'expression

$$X\,dy - Y\,dx = \frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

doit être une différentielle exacte.

213. Nous avons reconnu que deux surfaces associées sont applicables l'une sur l'autre, et que les plans tangents aux points correspondants sont parallèles. Réciproquement, *si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre et si les plans tangents aux points correspondants sont parallèles, elles sont nécessairement deux surfaces minima associées.* Pour établir cette proposition, nous emploierons le système de coordonnées tangentielles (α, β, ξ) du n° 165, dans lequel l'expression de l'élément linéaire est

$$ds^2 = (z\,d\beta + dp)(z\,d\alpha + dq).$$

Pour deux plans tangents parallèles, on peut toujours supposer que les coordonnées α et β ont la même valeur. Il faut donc re-

chercher si deux valeurs différentes ξ, ξ_1 de la fonction ξ peuvent donner la même valeur de l'élément linéaire, c'est-à-dire si l'on peut avoir

$$(12)\qquad (z\,d\beta + dp)(z\,d\alpha + dq) = (z_1\,d\beta + dp_1)(z_1\,d\alpha + dq_1),$$

z et z_1 ayant d'ailleurs les valeurs suivantes, indiquées au n° 165,

$$(13)\qquad z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad z_1 = \frac{\xi_1 - p_1\alpha - q_1\beta}{1 + \alpha\beta}.$$

L'équation (12) peut être vérifiée de deux manières différentes. On peut avoir, soit

$$(14)\qquad \begin{cases} z\,d\beta + dp = \lambda\,(z_1\,d\beta + dp_1), \\ z\,d\alpha + dq = \dfrac{1}{\lambda}(z_1\,d\alpha + dq_1), \end{cases}$$

soit

$$(15)\qquad \begin{cases} z\,d\beta + dp = \lambda\,(z_1\,d\alpha + dq_1), \\ z\,d\alpha + dq = \dfrac{1}{\lambda}(z_1\,d\beta + dp_1), \end{cases}$$

λ désignant, dans les deux systèmes de formules, une fonction inconnue. Le premier système donne les équations

$$(16)\qquad \begin{cases} z + s = \lambda(z_1 + s_1), & z + s = \dfrac{1}{\lambda}(z_1 + s_1), \\ r = \cdot\; r_1, & t = \dfrac{1}{\lambda}\,t_1. \end{cases}$$

Si donc la somme $z + s$ n'est pas nulle, il faudra que λ soit égal à ± 1. Alors la fonction

$$\xi \mp \xi_1 = \Xi$$

devra satisfaire aux trois équations

$$\mathrm{R} = 0, \qquad \mathrm{T} = 0, \qquad \Xi - \mathrm{P}\alpha - \mathrm{Q}\beta + \mathrm{S}(1 + \alpha\beta) = 0,$$

que l'on résoudra facilement et qui donnent

$$\Xi = \mathrm{A}(\alpha\beta - 1) + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{C}\beta,$$

A, B, C étant trois constantes quelconques.

On reconnaîtra aisément qu'en imprimant une translation convenable à l'une des deux surfaces, on peut annuler Ξ et avoir, par

conséquent,

$$\xi \pm \xi_1 = 0.$$

Les deux surfaces proposées sont donc égales ou symétriques. Cette solution pouvait être prévue *a priori*.

Mais, si l'on a

$$z + s = 0$$

et, par conséquent,

$$z_1 + s_1 = 0,$$

les deux surfaces considérées sont des surfaces minima (n° 194).

Revenons aux notations du Chapitre III et soient

$$\xi = 2u_1 f(u) + 2u f_1(u_1) - (1 + uu_1)[f'(u) + f_1'(u_1)],$$
$$\xi = 2u_1 \varphi(u) + 2u \varphi_1(u_1) - (1 + uu_1)[\varphi'(u) + \varphi_1'(u_1)]$$

les équations de nos deux surfaces. Si, dans les formules (16), nous remplaçons les dérivées r, t, r_1, t_1 par leurs valeurs, nous trouverons

$$f'''(u) = \lambda \varphi'''(u), \qquad f_1'''(u_1) = \frac{1}{\lambda} \varphi_1'''(u_1).$$

Ces deux équations montrent que λ est une constante. Si on la désigne par $e^{i\alpha}$, on passera de l'une des surfaces à l'autre en remplaçant $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par $e^{i\alpha}\mathcal{F}(u)$, $e^{-i\alpha}\mathcal{F}_1(u_1)$. C'est la substitution que nous étudions dans ce Chapitre.

Le système (15), que nous devons maintenant examiner, nous conduit aux équations

$$z + s = \lambda t_1, \qquad z + s = \frac{r_1}{\lambda},$$

$$r = (z_1 + s_1)\lambda, \qquad t = \frac{z_1 + s_1}{\lambda};$$

d'où l'on déduit, en particulier,

$$(z + s)^2 - rt = r_1 t_1 - (z_1 + s_1)^2.$$

Cette équation exprime (n° 165) qu'aux points correspondants des deux surfaces le produit des rayons de courbure principaux prend des valeurs égales et de signe contraire pour les deux surfaces. D'après le théorème fondamental de Gauss que nous démontrerons plus tard, il est impossible que les surfaces soient applicables l'une sur l'autre; et notre réciproque est ainsi complètement démontrée.

214. Les méthodes précédentes se prêtent à l'examen d'une question qui, sous un énoncé différent, a été l'objet des savantes recherches de M. Mathet (¹).

Nous avons vu (Liv. II, Ch. III) que, dans le plan, on peut imaginer une infinité de méthodes de transformation avec similitude des éléments infiniment petits, dans lesquelles, à tout élément linéaire passant par un point M correspond un élément passant par le point correspondant M′ et faisant avec son homologue un angle qui ne dépend que de la position du point M et demeure constant quand le premier élément tourne autour de M. Peut-on transporter ces propriétés à l'espace? Est-il possible d'établir, entre deux surfaces différentes (Σ), (Σ_1), une correspondance point par point avec similitude des éléments infiniment petits, pour laquelle l'angle de deux éléments correspondants passant respectivement par deux points M, M′ des deux surfaces ne dépende que de la position de M ou de M′ et nullement de la direction de l'un des éléments? Telle est la question générale dont nous allons chercher la solution.

Soient x, y, z; x_1, y_1, z_1 les coordonnées de deux points correspondants sur les deux surfaces, qui seront six fonctions inconnues de deux paramètres. Les propriétés de la transformation se traduiront par les deux équations

$$(17)\quad \begin{cases} dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \lambda(dx^2+dy^2+dz^2), \\ dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \lambda'\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}\sqrt{dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2}. \end{cases}$$

En tenant compte de la première, on peut remplacer la seconde par la suivante :

$$(17')\qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = \mu(dx^2+dy^2+dz^2),$$

qui est rationnelle; λ et μ seront d'ailleurs des fonctions que l'énoncé de la question n'assujettit à aucune condition.

Prenons comme variables indépendantes les paramètres α, β

(¹) MATHET, *Solution d'un problème de Géométrie* (*Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 313; 1863). *Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum* (même tome, p. 323).

des lignes de longueur nulle de la surface (Σ). On aura

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \\ &\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations précédentes nous donneront les relations nouvelles

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = 0, \\ &\left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right)^2 = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial z_1}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières de ces relations déterminent très simplement les rapports de $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}$. En tenant compte des équations (18), on trouve

$$(20)\quad \frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}},$$

et l'on aura de même

$$(21)\quad \frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial x}{\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial y_1}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial y}{\partial \beta}} = \frac{\dfrac{\partial z_1}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial z}{\partial \beta}}.$$

Si l'on désigne respectivement par θ et θ_1 les valeurs communes des rapports précédents, on pourra écrire

$$(22)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \theta \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \theta_1 \frac{\partial x}{\partial \beta},$$

et les équations analogues en y et z. En éliminant x_1 on obtiendra l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\theta \frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\theta_1 \frac{\partial x}{\partial \beta}\right),$$

$$(\theta - \theta_1)\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

à laquelle satisferont également y et z. Par suite (n° **84**), α et β seront les paramètres de deux familles conjuguées; et la surface

(Σ), admettant pour lignes conjuguées ses lignes de longueur nulle, sera une surface minima. Il en sera évidemment de même de la surface (Σ_1). De plus, les formules (20) et (21) montrent qu'aux points correspondants des deux surfaces, les lignes de longueur nulle correspondantes auront la même direction; et, par conséquent, les plans tangents aux deux surfaces seront parallèles.

Réciproquement, si l'on prend deux surfaces minima *quelconques* et si l'on établit la correspondance entre les points de ces surfaces par la condition que les plans tangents y soient parallèles, pour ces points correspondants les quantités u et u_1 qui figurent dans les formules de M. Weierstrass auront les mêmes valeurs; et ces formules nous permettent de vérifier que toutes les relations (19) seront satisfaites. Ces deux surfaces donneront donc effectivement la solution générale du problème proposé.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, la correspondance établie entre leurs points détermine évidemment un tracé géographique de l'une d'elles sur l'autre. La proposition que nous venons d'établir, jointe à celle que nous avons obtenue au n° 213, nous permet donc d'énoncer les résultats suivants :

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre de telle manière que les éléments correspondants fassent entre eux un angle constant, ce sont nécessairement deux surfaces minima associées et les plans tangents aux points correspondants sont parallèles.

Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre avec orthogonalité des éléments correspondants, elles ne peuvent être que deux surfaces minima dont l'une est adjointe à l'autre.

215. Nous ne quitterons pas ce sujet sans remarquer que les formules (7) donnent un nouvel exemple d'une surface se déformant d'une manière continue sans cesser d'être applicable sur elle-même. Lorsque α varie, chaque point de la surface décrit une ellipse ayant son centre à l'origine des coordonnées. Il y a ici une remarque essentielle à faire. Dans l'exemple du n° 77, une portion de la surface ne pouvait se déformer indéfiniment sans se plier ou se déchirer dès que l'on dépassait certaines positions

limites; dans l'exemple actuel, rien de pareil ne se produit et l'on peut continuer indéfiniment le mouvement de déformation d'une portion quelconque de surface jusqu'à ce que celle-ci revienne, lorsque α a crû de 2π, à sa position primitive. Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer que cet exemple est le seul dans lequel une surface puisse se déformer de telle manière que ses différents points décrivent des coniques, et nous insisterons sur les propriétés géométriques suivantes, qui ont été signalées par M. O. Bonnet.

Nous avons vu que, si l'on considère la surface minima correspondante à un système de valeurs de $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ et si l'on pose

$$x_1 + iy_1 = \int \sqrt{2\mathcal{F}(u)}\,du, \qquad x_1 - iy_1 = \int \sqrt{2\mathcal{F}_1(u_1)}\,du_1,$$

les lignes de courbure sont définies par les équations

$$x_1 = \text{const.} \qquad y_1 = \text{const.}$$

et les lignes asymptotiques par les équations

$$x_1 + y_1 = \text{const.}, \qquad x_1 - y_1 = \text{const.}$$

Pour passer de la surface précédente à toute autre surface associée, il faudra remplacer $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par $\mathcal{F}(u)e^{i\alpha}$, $\mathcal{F}_1(u_1)e^{-i\alpha}$ et les nouvelles valeurs x'_1, y'_1 de x_1, y_1 seront définies par les formules

$$x'_1 + iy'_1 = e^{i\frac{\alpha}{2}}(x_1 + iy_1),$$
$$x'_1 - iy'_1 = e^{-i\frac{\alpha}{2}}(x_1 + iy_1),$$

qui donnent

$$(23) \qquad \begin{cases} x'_1 = x_1 \cos\frac{\alpha}{2} - y_1 \sin\frac{\alpha}{2}, \\ y'_1 = x_1 \sin\frac{\alpha}{2} + y_1 \cos\frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Par suite les lignes de courbure de la surface associée seront définies par les équations

$$x_1 \cos\frac{\alpha}{2} - y_1 \sin\frac{\alpha}{2} = \text{const.}, \qquad x_1 \sin\frac{\alpha}{2} + y_1 \cos\frac{\alpha}{2} = \text{const.},$$

et les lignes asymptotiques par les équations

$$x_1 \cos\frac{2\alpha-\pi}{4} - y_1 \sin\frac{2\alpha-\pi}{4} = \text{const.},$$

$$x_1 \sin\frac{2\alpha-\pi}{4} + y_1 \cos\frac{2\alpha-\pi}{4} = \text{const.}$$

On voit que, sur la surface primitive, elles correspondent aux lignes qui coupent les lignes de paramètre x_1 sous des angles $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$. Si l'on considère en particulier la surface adjointe, on aura $\alpha=\frac{\pi}{2}$, *les lignes de courbure de cette surface correspondront aux lignes asymptotiques de la proposée et* vice versa.

Traitons, par exemple, le cas où l'on a

$$\mathcal{F}(u) = -\frac{1}{2u^2}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = -\frac{1}{2u_1^2}.$$

Les formules qui définissent la famille de surfaces associées sont les suivantes

$$(24)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{e^{i\alpha}}{4}\left(u+\dfrac{1}{u}\right) + \dfrac{e^{-i\alpha}}{4}\left(u_1+\dfrac{1}{u_1}\right), \\ Y = \dfrac{ie^{i\alpha}}{4}\left(\dfrac{1}{u}-u\right) - \dfrac{ie^{-i\alpha}}{4}\left(\dfrac{1}{u_1}-u_1\right), \\ Z = -\dfrac{e^{i\alpha}}{2}\mathrm{L}u - \dfrac{e^{-i\alpha}}{2}\mathrm{L}u_1 + \mathrm{C}, \end{cases}$$

C désignant une constante quelconque. Posons

$$u_1 = e^{-\mu-i\nu}, \qquad u = e^{-\mu+i\nu},$$

et nous obtiendrons

$$(25)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}e^{-\mu}\cos(\nu+\alpha) + \dfrac{1}{2}e^{\mu}\cos(\nu-\alpha), \\ Y = \dfrac{1}{2}e^{-\mu}\sin(\nu+\alpha) + \dfrac{1}{2}e^{\mu}\sin(\nu-\alpha), \\ Z = \mu\cos\alpha + \nu\sin\alpha. \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$, on trouve l'alysséide. Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on obtient l'hélicoïde gauche à plan directeur. Ces deux surfaces sont appli-

cables l'une sur l'autre avec orthogonalité des éléments et les lignes de courbure de l'une correspondent aux asymptotiques de l'autre. Les surfaces qui correspondent à une valeur quelconque de α sont les hélicoïdes déjà rencontrées aux n°s 75 et 180.

216. Après avoir obtenu *une* famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée, proposons-nous de rechercher, d'une manière générale, *toutes* les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée (Σ). Soit

$$ds^2 = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1)\,du\,du_1$$

l'élément linéaire de cette surface et soit

$$ds^2 = (1 + vv_1)^2 \mathcal{G}(v)\mathcal{G}_1(v_1)\,dv\,dv_1$$

l'élément linéaire d'une autre surface minima (Σ'). Pour qu'elles soient applicables l'une sur l'autre, il faudra que l'on puisse déterminer v, v_1 en fonction de u et de u_1, de manière à satisfaire à l'équation

$$(1 + vv_1)^2 \mathcal{G}_1(v)\mathcal{G}(v_1)\,dv\,dv_1 = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1)\,du\,du_1.$$

Cette égalité ne peut être vérifiée (n° 117) que si l'on a

$$v = \varphi(u), \qquad v_1 = \psi(u_1),$$

ou

$$v = \varphi(u_1), \qquad v_1 = \psi(u),$$

φ et ψ désignant des fonctions à déterminer. En donnant un sens convenable aux normales des deux surfaces, on peut prendre

$$v = \varphi(u), \qquad v_1 = \psi(u_1),$$

et l'équation à vérifier prendra la forme

$$(1 + \varphi\psi)^2 \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}_1(\psi)\varphi'\psi' = (1 + uu_1)^2 \mathcal{F}(u)\mathcal{F}_1(u_1).$$

Égalons les logarithmes des deux membres et prenons la dérivée seconde par rapport à u et à u_1. Nous aurons

$$\frac{\varphi'\psi'}{(1 + \varphi\psi)^2} = \frac{1}{(1 + uu_1)^2}$$

ou encore

$$\frac{4\,dv\,dv_1}{(1 + vv_1)^2} = \frac{4\,du\,du_1}{(1 + uu_1)^2}.$$

Cette égalité exprime que les représentations sphériques de deux figures correspondantes sur les deux surfaces sont égales ou symétriques (Livre I, Chap. III). Comme, par hypothèse, v est une fonction de u, ces représentations sont ici égales et, par conséquent, on pourra, en orientant convenablement la seconde surface, prendre

$$v = u, \qquad v_1 = u_1.$$

Il restera donc à satisfaire uniquement à l'équation

$$\mathfrak{F}(u)\mathfrak{F}_1(u_1) = \mathcal{G}(u)\mathcal{G}_1(u_1)$$

et cette équation ne peut être vérifiée que si l'on a

$$\mathcal{G}(u) = \mathfrak{F}(u)e^{i\alpha},$$
$$\mathcal{G}_1(u_1) = \mathfrak{F}_1(u_1)e^{-i\alpha},$$

α étant une constante quelconque. Les seules surfaces minima applicables sur une surface donnée sont donc les surfaces *associées* à la surface proposée ([1]).

217. Il nous reste maintenant à examiner une dernière question qui se rapproche de celles qui ont été étudiées dans ce Chapitre. Proposons-nous de déterminer toutes les surfaces minima applicables sur des surfaces de révolution. Comme une surface de révolution est applicable sur elle-même d'une infinité de manières, il suffira de rechercher les surfaces minima qui jouissent de la même propriété.

Reprenons les formules de M. Weierstrass et soient (u, u_1), (v, v_1) les valeurs de u et de u_1, relatives à deux points de la surface. Nous chercherons s'il est possible de satisfaire à l'équation

$$(1 + uu_1)^2\, \mathfrak{F}(u)\, \mathfrak{F}_1(u_1)\, du\, du_1 = (1 + vv_1)^2\, \mathfrak{F}(v)\, \mathfrak{F}_1(v_1)\, dv\, dv_1,$$

en prenant pour v et v_1 des fonctions de u et de u_1 qui devront même contenir un paramètre variable et se réduire, pour une va-

---

([1]) La détermination de toutes les surfaces minima applicables sur une surface minima donnée est due à M. O. Bonnet. (*Voir*, en particulier, le *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* inséré au XLIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 8 et suiv., p. 73 et suiv.; 1860, 1867).

leur de ce paramètre, aux suivantes

$$v = u, \qquad v_1 = u_1;$$

v ne pouvant dépendre que de u ou de u_1 sera, par suite, une fonction de u et, en raisonnant comme dans le numéro précédent, on trouvera encore

$$\frac{du\,du_1}{(1+uu_1)^2} = \frac{dv\,dv_1}{(1+vv_1)^2}.$$

La solution la plus générale de cette équation est donnée par les formules

$$v = \frac{mu+n}{-n_0 u + m_0}, \qquad v_1 = \frac{m_0 u_1 + n_0}{-nu_1 + m},$$

et l'équation à vérifier deviendra

$$\mathfrak{F}(u)\,\mathfrak{F}_1(u_1) = \frac{(mm_0+nn_0)^4}{(m-nu_1)^4(m_0-n_0u)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{-n_0+m_0}\right)\mathfrak{F}_1\left(\frac{m_0u_1+n_1}{-nn_1+m}\right).$$

Elle se décompose évidemment dans les suivantes :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}(u) &= \frac{(mm_0+nn_0)^2}{(m_0-n_0u)^4}\,\mathfrak{F}\left(\frac{mu+n}{-n_0u+m_0}\right)e^{i\theta}, \\ \mathfrak{F}_1(u_1) &= \frac{(mm_0+nn_0)^2}{(m-nu_1)^2}\,\mathfrak{F}_1\left(\frac{m_0u_1+n_0}{-nu+m}\right)e^{-i\theta}, \end{aligned}\right.$$

où θ désigne une quantité nécessairement constante, puisqu'elle ne dépend ni de u_1 en vertu de la première équation, ni de u en vertu de la seconde.

Les équations précédentes devront avoir lieu pour une infinité de systèmes de valeurs de m, n, m_0, n_0 fonctions continues d'un paramètre et se réduisant, pour une valeur déterminée de ce paramètre, aux valeurs suivantes : 1, 0, 1, 0. Différentions la première, par exemple, par rapport à ce paramètre. Nous aurons, en désignant par des lettres accentuées les dérivées par rapport à ce paramètre,

$$\begin{aligned} &\frac{2(mm_0+nn_0)'}{mm_0+nn_0} - \frac{4(m_0'-n_0'u)}{m_0-n_0u} + i\theta' \\ &\quad + \frac{\mathfrak{F}'}{\mathfrak{F}}\left[\frac{(m'u+n')(m_0-n_0u)-(mu+n)(m_0'-n_0'u)}{(m_0-n_0u)^2}\right] = 0. \end{aligned}$$

Faisons dans cette équation

$$m = m_0 = 1, \qquad n = n_0 = 0,$$

elle se réduira à la suivante

$$4n'_0 u + 2(m' - m'_0) + i\theta' + \frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)}[m'u + n' - u(m'_0 - n'_0 u)] = 0,$$

où l'on devra regarder m_0, m'_0, n', n'_0, θ' comme des constantes. On pourrait intégrer cette équation et déterminer $\mathfrak{F}(u)$; mais il est préférable de montrer que l'on peut toujours choisir les axes, de telle manière que les constantes m', m'_0, n', n'_0 prennent des valeurs très simples.

Reprenons les formules de substitution

$$v = \frac{mu + n}{-n_0 u + m_0}, \qquad v_1 = \frac{m_0 u_1 + n_0}{m - n u_1}.$$

Nous savons qu'elles définissent un déplacement à la surface de la sphère. Si, en particulier, nous prenons les valeurs de m, m_0, n, n_0 très voisines de 1, 1, 0, 0, elles définiront un déplacement infiniment petit du point (u, u_1) à partir de sa position initiale. Ainsi les formules

$$v = \frac{(dm + 1)u + dn}{-u\, dn_0 + (1 + dm_0)}, \qquad v_1 = \frac{u_1(1 + dm_0) + dn_0}{-u_1\, dn + (1 + dm)}$$

représentent une rotation $d\alpha$ autour d'un certain diamètre de la sphère. Si nous prenons ce diamètre pour axe des z, il faudra que l'on ait

$$dn = dn_0 = 0, \qquad dm = i\frac{d\alpha}{2}, \qquad dm_0 = -i\frac{d\alpha}{2}$$

et, par conséquent,

$$n' = n'_0 = 0, \qquad m' = i\frac{\alpha'}{2}, \qquad m'_0 = -i\frac{\alpha'}{2}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation à laquelle doit satisfaire $\mathfrak{F}(u)$, nous trouverons

$$2i\alpha' + i\theta' + \frac{\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} i\alpha' u = 0$$

et, par suite,

$$\frac{u\,\mathfrak{F}'(u)}{\mathfrak{F}(u)} = k,$$

k désignant une constante. En intégrant, on a

(27) $$\mathfrak{F}(u) = C u^k.$$

On trouverait de même

$$\mathcal{F}_1(u_1) = C_1 u_1^k. \tag{27'}$$

Les surfaces qui correspondent à ces valeurs des fonctions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ jouissent bien de la propriété indiquée et sont, nous l'avons déjà vu (n° 203), applicables sur des surfaces de révolution. La méthode par laquelle nous les avons obtenues a été indiquée par M. Schwarz ([1]).

Nous signalerons une remarquable propriété dont elles jouissent. Remplaçons dans les formules de M. Weierstrass $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ par leurs valeurs précédentes où, pour plus de netteté, on aura mis $m - 2$ à la place de k, en sorte que l'on aura

$$\mathcal{F}(u) = C u^{m-2}, \qquad \mathcal{F}_1(u_1) = C_1 u_1^{m-2}.$$

Si l'on fait tourner la surface de l'angle α autour de l'axe des z, les nouvelles valeurs de $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}_1(u_1)$ seront, d'après les formules (23) du n° 200,

$$\mathcal{F}(v) = C e^{-mi\alpha} v^{m-2},$$
$$\mathcal{F}_1(v_1) = C_1 e^{mi\alpha} v_1^{m-2}.$$

On voit que, lorsque m n'est pas nul, ces nouvelles valeurs conviennent à une des surfaces associées à la proposée. Le cas où m est nul correspond, nous le savons (n° 200), aux hélicoïdes. On est ainsi conduit au théorème suivant :

Si l'on considère toutes les surfaces minima, autres que les hélicoïdes, qui sont applicables sur des surfaces de révolution, elles sont superposables à leurs surfaces associées; si l'on fait tourner la surface d'un angle quelconque autour de son axe, on obtient l'une des surfaces associées.

Par suite, pour obtenir toutes les applications de la surface sur elle-même, il suffira de la faire tourner d'un angle quelconque autour de son axe et de faire correspondre dans les deux positions les points où les plans tangents sont parallèles.

([1]) Schwarz, *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*, p. 296. *Voir* aussi Bour, *Théorie de la déformation des surfaces*, p. 99.

Si l'on veut de même obtenir toutes les surfaces minima applicables sur une surface spirale, il faudra prendre (¹)

$$\mathfrak{F}(u) = \mathrm{C}\,u^{m+ni}, \qquad \mathfrak{F}_1(u_1) = \mathrm{C}_1\,u_1^{m-ni}; \tag{28}$$

l'application de la méthode précédente conduit, sans difficulté, à ce résultat, que nous nous contentons de signaler. Le lecteur démontrera sans difficulté que les surfaces obtenues sont semblables à celles qui leur sont *associées*.

(¹) S. Lie, *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen* (*Mathematische Annalen,* t. XV, p. 503; 1879).

CHAPITRE VI.

LES FORMULES DE MONGE ET LEUR INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Recherches de M. Lie. — Génération de toute surface minima par la translation de deux courbes minima. — Étude de ce mode de génération, détermination nouvelle des surfaces algébriques et des surfaces réelles. — Surfaces minima doubles. — Détermination des surfaces doubles réelles. — Courbes minima qui sont identiques à leurs conjuguées. — Les surfaces minima dans le premier système de coordonnées tangentielles étudié au Livre II, Chap. VII. — Propriété géométrique qui distingue les surfaces doubles des surfaces simples. — Surfaces découvertes par Möbius et dans lesquelles on peut passer d'une face à l'autre par un chemin continu.

---

218. Les Chapitres précédents contiennent l'exposition d'une série de résultats qui reposent sur la forme particulière donnée aux formules de Monge par M. Weierstrass. Dans des travaux récents [1], M. Sophus Lie est revenu aux équations de Monge; il en a donné l'interprétation géométrique la plus élégante et il a mis en évidence tout le parti que l'on peut en tirer dans l'étude et dans la théorie algébrique des surfaces minima. Nous allons développer, dans ce Chapitre, les principes de la méthode de M. Lie.

Reprenons les formules de Monge

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau), \\ y = B(t) + B_1(\tau), \\ z = C(t) + C_1(\tau), \end{cases}$$

où les fonctions $A, \ldots, A_1, \ldots$ satisfont aux conditions

$$(2)\qquad \begin{cases} dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0, \\ dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0. \end{cases}$$

---

[1] S. Lie, *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen : I. Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (*Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 331; 1878). — *II. Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen*, même Recueil (t. XV, p. 465; 1879). Les recherches de M. Lie avaient déjà été publiées en partie dans les *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* (t. II, p. 157 et 338, 1877; t. III, p. 166, 224 et 340).

Elles nous montrent immédiatement que les surfaces minima sont des cas particuliers des surfaces étudiées au n° 80 et qui peuvent être engendrées par la translation de deux courbes différentes; seulement ces courbes sont ici imaginaires et leurs tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini. Nous obtenons ainsi la génération suivante des surfaces minima, qui sert de base aux travaux de M. Lie.

La surface minima la plus générale peut être engendrée de deux manières différentes par la translation d'une courbe imaginaire dont les tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini, le déplacement étant complètement défini par la condition qu'un point déterminé de la courbe décrive une autre courbe quelconque de même définition que la première.

219. Cette interprétation évidente des formules de Monge offre l'avantage de montrer immédiatement que la théorie des surfaces minima dérive de celle des courbes dont les tangentes vont rencontrer le cercle de l'infini et auxquelles nous donnerons, avec M. Lie, le nom de *courbes minima*. En se plaçant à ce point de vue, on peut retrouver facilement les différents systèmes de formules qui ne contiennent aucun signe de quadrature et déterminent les points d'une surface minima.

En effet, puisque les tangentes d'une courbe minima rencontrent le cercle de l'infini, la développable, enveloppe des plans osculateurs de cette courbe, devra contenir le cercle de l'infini.

Si l'on prend l'équation d'un plan tangent à cette développable sous la forme

$$x+\alpha y+i\sqrt{1+\alpha^2}\,z+f(\alpha)=0,$$

le point correspondant de la courbe minima sera déterminé par les formules suivantes

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha f'(\alpha)-f(\alpha)+f''(\alpha)(1+\alpha^2),\\ y &= -f'(\alpha)+\alpha f''(\alpha)(1+\alpha^2),\\ z &= if''(\alpha)(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right.$$

qui conduiraient aux équations de Legendre (n° 187).

Mais, le cercle de l'infini étant une courbe unicursale, on peut

prendre l'équation du plan tangent à la développable sous la forme rationnelle

$$(4)\qquad (1-u^2)x+i(1+u^2)y+2uz+2f(u)=0,$$

qui donne, pour un point de l'arête de rebroussement, les expressions suivantes des coordonnées :

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1-u^2}{2}f''(u)+uf'(u)-f(u), \\ y = i\dfrac{1+u^2}{2}f''(u)-iuf'(u)+if(u), \\ z = uf''(u)-f'(u). \end{cases}$$

Si l'on associe ce système au système analogue où l'on changera i en $-i$, on retrouvera les formules de M. Weierstrass. Les deux courbes minima qui interviennent dans ces formules sont les arêtes de rebroussement des deux développables, enveloppes des plans

$$(6)\qquad \begin{cases} (1-u^2)x+i(1+u^2)y+2uz+2f(u)=0, \\ (1-u_1^2)x-i(1+u_1^2)y+2u_1z+2f_1(u_1)=0. \end{cases}$$

220. Revenons aux équations qui déterminent la surface minima sous leur forme la plus générale et au mode de génération employé par M. Lie. Si l'on veut éviter la considération d'une translation imaginaire, il suffira d'appliquer le théorème donné au n° 82; ce qui donnera la proposition suivante :

Soient les deux courbes minima (Γ), (Γ_1) *définies respectivement par les équations*

$$\begin{aligned} x &= 2A(t), & x &= 2A_1(\tau), \\ y &= 2B(t), & y &= 2B_1(\tau), \\ z &= 2C(t), & z &= 2C_1(\tau). \end{aligned}$$

Le milieu de la droite qui joint un point quelconque de l'une à un point quelconque de l'autre décrit la surface minima la plus générale définie par les formules (1).

La surface demeurera la même si l'on substitue à (Γ), (Γ_1) les

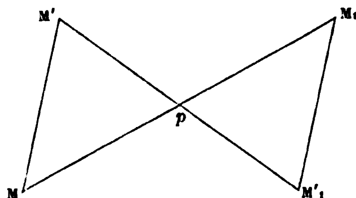
deux courbes suivantes

$$x = 2A(t) + h, \qquad x = 2A_1(\tau) - h,$$
$$y = 2B(t) + k, \qquad y = 2B_1(\tau) - k,$$
$$z = 2C(t) + l, \qquad z = 2C_1(\tau) - l,$$

où h, k, l désignent trois constantes quelconques, c'est-à-dire si l'on imprime à la courbe (Γ) une translation déterminée quelconque, à la condition d'imprimer à (Γ_1) la translation égale et contraire.

Soit MM_1 (*fig.* 15) une droite dont les extrémités s'appuient sur les courbes (Γ), (Γ_1). Si le point M reste fixe, le milieu p de MM_1 décrira une courbe minima de la surface, homothétique à (Γ_1), le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$. Si, au contraire, le point M_1 reste fixe, le point p décrira une autre courbe minima homothétique à (Γ). Cette simple remarque, qui a déjà été présentée d'une ma-

Fig. 15.



nière générale au n° **82**, suffit à montrer que, si l'on a obtenu deux générations différentes de la surface au moyen de deux courbes (Γ), (Γ_1) et de deux autres courbes (Γ'), (Γ'_1), ces dernières ne sont autres que les précédentes déplacées parallèlement à elles-mêmes. Soient en effet MM_1, $M'M'_1$ deux droites appartenant aux deux modes différents et ayant leur milieu en un même point p de la surface. Si le point p décrit une des courbes minima de la surface, l'un des points M, M_1 et l'un des points M', M'_1 demeureront fixes. Supposons que ce soient les points M et M'. La droite $M_1M'_1$ demeurera constamment égale et parallèle à M'M. Par conséquent, la courbe (Γ'_1) se déduira de (Γ_1) par une translation constante et égale à M'M. Si le point p décrit maintenant l'autre courbe minima de la surface, M_1 et M'_1 demeureront fixes et la ligne M'M demeurera constante en grandeur et en direction. On voit donc que, si l'on a obtenu un mode de génération de la

surface, on obtiendra tous les autres en imprimant aux deux courbes (Γ), (Γ_1) deux translations égales et opposées.

Le résultat précédent joue un rôle essentiel dans les développements qui vont suivre. Il permet en particulier de résoudre la question suivante :

Considérons un mode de génération de la surface, obtenu au moyen de deux courbes (Γ), (Γ_1). Est-il possible que les différents points de la surface soient donnés de plusieurs manières par cette génération, c'est-à-dire soient les milieux de deux ou plusieurs segments appuyant leurs extrémités sur ces deux courbes?

S'il en est ainsi, soient MM_1, $M'M'_1$ (*fig.* 15) deux droites donnant le même point p de la surface. La trajectoire de l'un des points M', M'_1, du point M' par exemple, se déduit de la trajectoire (Γ) du point M par une translation constante MM'. Cela posé, si le point M' appartient à la courbe (Γ_1), cette courbe devra dériver de (Γ) par une simple translation. Écartons ce cas intéressant qui sera soumis plus loin à une étude approfondie. Si, au contraire, le point M' appartient à la courbe (Γ), le point M'_1 appartiendra à (Γ_1) et les deux courbes (Γ), (Γ_1) pourront être soumises à deux translations égales et contraires MM', $M_1M'_1$ sans cesser de coïncider avec elles-mêmes. Elles seront deux courbes *périodiques* et, par conséquent, transcendantes, admettant la même période [1].

Réciproquement, toutes les fois que les courbes seront périodiques et admettront la même période, chaque point de la surface sera le milieu d'une infinité de segments; car soient M_0, N_0 deux points pris respectivement sur les deux courbes. En appliquant dans les deux sens la translation à laquelle on peut soumettre les courbes, on en déduira deux séries de points en ligne droite (*fig.* 16)

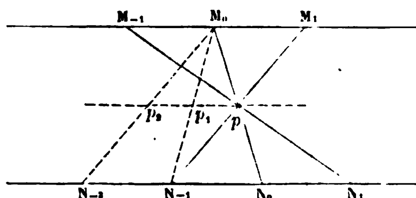
$$\ldots,\quad M_{-2},\quad M_{-1},\quad M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad \ldots,$$
$$\ldots,\quad N_{-2},\quad N_{-1},\quad N_0,\quad N_1,\quad N_2,\quad \ldots;$$

Les segments M_0N_0, M_1N_{-1}, $M_{-1}N_1$, ... auront évidemment le

[1] Nous donnerons ici, et dans la suite, le nom de *périodiques* aux courbes ou aux surfaces, nécessairement transcendantes, qui ne cessent pas de coïncider avec elles-mêmes quand on leur imprime une translation déterminée.

même milieu et donneront le même point de la surface. La considération des cordes M_0N_{-1}, M_0N_{-2} montre d'ailleurs que la surface minima sera périodique comme les courbes, et la translation pp_1 à laquelle on peut la soumettre sera la moitié de celle qui convient aux deux courbes.

Fig. 16.



En dehors du cas que nous venons de signaler et de celui où la courbe (Γ_1) n'est autre que la courbe (Γ) déplacée parallèlement à elle-même, les points de la surface qui forment le lieu des milieux de deux segments différents ne pourront s'étendre sur une nappe et formeront tout au plus une ou plusieurs courbes qui seront des lignes multiples et, en général, des lignes doubles de la surface.

221. Après avoir étudié d'une manière générale la construction géométrique qui sert de base aux travaux de M. Lie, proposons-nous d'obtenir toutes les surfaces algébriques et toutes les surfaces réelles. La surface sera évidemment algébrique si les deux courbes (K), (K_1), dont la translation peut engendrer la surface, sont elles-mêmes algébriques. Réciproquement, si la surface est algébrique, ces deux courbes doivent l'être aussi; car soient (k), (k') deux positions de l'une d'elles. Il existe une translation qui amène (k) en (k'). Appliquée à la surface, cette translation l'amène dans une position nouvelle où elle contiendra encore (k'). La courbe (k'), étant l'intersection complète ou une partie de l'intersection de deux surfaces algébriques, sera donc algébrique. Ainsi :

Pour obtenir toutes les surfaces algébriques, il faudra prendre pour les courbes (Γ), (Γ_1), *ou pour les courbes* (K), (K_1) *dont la translation engendre la surface, deux lignes algébriques.*

222. Proposons-nous maintenant d'obtenir toutes les surfaces

réelles; soient (M) une telle surface et p un quelconque de ses points réels; soient

$$x = A(t), \qquad y = B(t), \qquad z = C(t)$$

les équations qui définissent l'une des deux courbes minima de la surface passant par le point p. La courbe conjuguée sera définie par les équations

$$x = A'(\tau), \qquad y = B'(\tau), \qquad z = C'(\tau),$$

où A', B', C' désignent les fonctions conjuguées de A, B, C. D'ailleurs elle se trouve évidemment sur la surface, passe par le point p et y admet une tangente qui est imaginaire conjuguée de la tangente à la première courbe. Elle est donc la seconde courbe minima de la surface passant par le point p. Ce point étant admis, désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point p; les équations

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A'(\tau) - x_0, \\ y &= B(t) + B'(\tau) - y_0, \\ z &= C(t) + C'(\tau) - z_0 \end{aligned}$$

déterminent une surface minima qui contient les deux courbes précédentes et coïncide, par conséquent, avec la surface donnée (M). Si l'on augmente A, A' de $\frac{x_0}{2}$, B, B' de $\frac{y_0}{2}$, C, C' de $\frac{z_0}{2}$, on peut les écrire sous la forme plus simple

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A'(\tau), \\ y &= B(t) + B'(\tau), \\ z &= C(t) + C'(\tau), \end{aligned}$$

A, A'; B, B'; C, C' désignant encore des fonctions imaginaires conjuguées. Réciproquement, il est évident que les formules précédentes donneront toujours une surface réelle; car il suffit, pour obtenir des points réels, d'y remplacer t et τ par des imaginaires conjuguées. Ainsi :

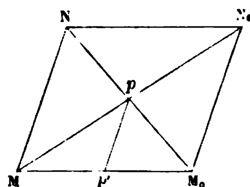
Pour obtenir toutes les surfaces réelles, on associera à une courbe minima quelconque la courbe imaginaire conjuguée, qui est aussi minima. Le milieu de la droite qui joint un point quelconque de la première courbe au point imaginaire con-

jugué, nécessairement situé sur la seconde courbe, décrira une nappe réelle de la surface minima réelle la plus générale.

223. Les raisonnements précédents laissent toutefois de côté une question dont l'examen offre quelque intérêt. Pour que le milieu de la droite qui joint deux points soit réel, il n'est pas nécessaire que les deux points soient imaginaires conjugués. Ne serait-il pas possible d'obtenir des nappes réelles en joignant les points de la première courbe à des points de la seconde qui ne seraient pas imaginaires conjugués des premiers. Les résultats obtenus au n° 220 donnent la réponse à cette question.

En effet, soient M un point pris sur la première courbe (Γ), N_0 un point pris sur la conjuguée (Γ′) (*fig.* 17), et soient M_0, N les

Fig. 17.



points imaginaires conjugués de M, N_0, le premier se trouvant sur la seconde courbe et le second sur la première. Si le milieu de la droite MN_0 est réel, il coïncidera avec le milieu de NM_0 et, par conséquent, chaque point de la nappe réelle étant obtenu de deux manières différentes, il faudra, d'après les résultats du n° 220, que l'une des droites MM_0, MN soit de grandeur et de direction constantes. Si cette propriété appartient à la droite MM_0, la courbe (Γ′) se déduira de (Γ) par une translation déterminée; nous avons déjà réservé (n° 220) cette hypothèse pour une discussion spéciale et nous pouvons admettre ici que la droite dont la grandeur et la direction sont invariables est le segment MN. Comme la figure MNN_0M_0 est un parallélogramme, la droite MN est égale et parallèle à sa conjuguée M_0N_0 et elle est, par suite, de grandeur et de direction réelles. La courbe (Γ) sera donc une courbe périodique admettant une période réelle MN et il en sera de même de la courbe conjuguée (Γ′). La surface minima sera aussi périodique et pourra être soumise à la translation réelle

$\frac{MN}{2}$ sans cesser de coïncider avec elle-même. Quant au milieu p de MN_0, il se déduira du milieu p' de MM_0 par la même translation. Par suite, en joignant seulement les points imaginaires conjugués, M, M_0 par exemple, sur les deux courbes, on n'aura pas toute la partie réelle de la surface, mais on obtiendra du moins une portion de la surface dont on peut faire dériver toutes les autres en la soumettant à la translation $\frac{MN}{2}$.

224. Il nous reste à examiner l'hypothèse particulière, réservée dans les raisonnements qui précèdent, où les deux courbes (Γ), (Γ_1) peuvent se ramener l'une à l'autre par une simple translation. Cette étude nous conduira à la notion importante et nouvelle des surfaces doubles, qui est due tout entière à M. Lie.

Nous avons vu que l'on peut, dans la génération de la surface, substituer aux deux courbes (Γ), (Γ_1) deux autres courbes (Γ'), (Γ'_1) qui s'en déduisent respectivement par deux translations égales et opposées. D'après cela, si nous désignons par (d) la translation qui, dans le cas actuel, amène (Γ) à coïncider avec (Γ_1), nous pourrons imprimer à (Γ) la translation $\left(\frac{d}{2}\right)$ et à (Γ_1) la translation $-\left(\frac{d}{2}\right)$: nous obtiendrons ainsi une seule et même courbe (D) qui remplacera à la fois (Γ) et (Γ_1), en sorte que *la surface proposée deviendra le lieu des milieux de toutes les cordes de cette courbe minima* (D).

Réciproquement, si une surface admet la génération précédente au moyen de la courbe (D), il résulte de la proposition démontrée au n° 220 que l'on obtiendra tous les systèmes différents de courbes (Γ), (Γ_1) au moyen desquels on peut engendrer la surface en imprimant à la courbe (D) deux translations égales et opposées. Par suite, les courbes (Γ), (Γ_1) relatives à tout système de génération de la surface pourront toujours se déduire l'une de l'autre par une simple translation.

Revenons à la génération de la surface au moyen de la courbe unique (D), elle permet de reconnaître que les deux courbes minima dont la translation engendre la surface sont identiques l'une à l'autre. Si l'on considère en effet une corde MM_1 de la

courbe (D), les deux courbes minima de la surface passant par le milieu de cette corde sont les homothétiques de (D), avec le même rapport de similitude $\frac{1}{2}$, par rapport aux points M, M_1. Elles sont donc égales et peuvent être amenées à coïncider par une translation égale à $\frac{1}{2}$ MM_1, imprimée à l'une d'elles. Nous pouvons ajouter que les deux séries de courbes minima tracées sur la surface ne peuvent plus être distinguées l'une de l'autre et forment *une seule famille composée de toutes les courbes que l'on obtient en prenant les homothétiques de la courbe* (D) *par rapport à chacun de ses points*. Ces courbes sont évidemment tangentes à la courbe (D), chacune au centre d'homothétie qui lui correspond, et elles admettent cette courbe pour enveloppe. Mais, comme il en passe deux par chaque point de la surface, qui est ainsi engendrée deux fois, M. Lie a donné le nom de *surfaces doubles* à toutes les surfaces minima que nous étudions ici et que l'on peut caractériser, comme on voit, en disant qu'elles sont le lieu des milieux des cordes d'une courbe minima (D).

Si la courbe (D) est définie par les équations

$$x = 2A(t), \qquad y = 2B(t), \qquad z = 2C(t),$$

la surface double correspondante le sera par le système

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A(\tau), \\ y &= B(t) + B(\tau), \\ z &= C(t) + C(\tau), \end{aligned}$$

où t et τ entrent symétriquement, en sorte que le même point de la surface correspond à deux systèmes différents de valeurs de t et de τ se déduisant l'un de l'autre par l'échange de ces deux variables.

225. La définition que nous avons adoptée permet de reconnaître qu'il existe des surfaces doubles réelles. Mais, pour faciliter cette recherche, nous commencerons par examiner s'il existe des surfaces doubles qui soient le lieu des milieux des cordes de deux courbes différentes (D), (D').

Nous pouvons appliquer ici les résultats du n° 220 en considérant (Γ) et (Γ_1) comme confondues avec (D), (Γ') et (Γ'_1)

comme confondues avec (D′). Il faudra que (D) puisse se déduire de (D′) par deux translations égales et opposées et, par conséquent, que (D) soit une courbe périodique. Réciproquement, si la courbe (D) est périodique, soit (d) la translation à laquelle on peut la soumettre sans qu'elle cesse de coïncider avec elle-même. On reconnaîtra aisément qu'en lui imprimant une translation égale seulement à $\left(\frac{d}{2}\right)$, on obtient une nouvelle courbe (D′) qui donne la même surface que la première.

Un raisonnement analogue montrera que, si un point quelconque de la surface correspond à deux cordes différentes de la courbe (D), cette courbe est nécessairement périodique.

En dehors du cas exceptionnel où (D) est périodique, on peut donc affirmer qu'à chaque surface minima double correspond une seule courbe (D) et que les points de la surface qui sont les milieux de deux cordes ne peuvent former une nappe et se distribuent tout au plus sur certaines lignes, nécessairement multiples, de la surface.

Ce point étant établi, proposons-nous de trouver toutes les surfaces doubles réelles. Soit (D) la courbe au moyen de laquelle on peut engendrer la surface; on reconnaît immédiatement, en changeant i en $-i$, que la surface peut aussi être engendrée au moyen de la courbe imaginaire conjuguée (D′). Donc :

Pour que la surface minima double soit réelle, il est nécessaire que la courbe (D) *coïncide avec sa conjuguée ou puisse, du moins, s'en déduire par une translation*

Réciproquement, supposons que la condition énoncée soit remplie. Si la courbe coïncide avec sa conjuguée, elle contiendra, en même temps que le point imaginaire M, le point imaginaire conjugué M_0, et le milieu de la corde MM_0 décrira une nappe réelle.

Si, au contraire, la courbe (D) ne coïncide pas avec sa conjuguée (D′), mais peut s'en déduire par une translation, la surface double correspondante à la courbe (D) pourra, si elle est réelle, être engendrée aussi au moyen de la courbe (D′), et la remarque faite plus haut nous apprend qu'elle sera nécessairement transcendante et périodique. Nous sommes ainsi conduits au résultat suivant :

Pour obtenir toutes les surfaces doubles réelles non périodiques et, en particulier, toutes les surfaces doubles algébriques, il suffit de déterminer toutes les courbes minima qui sont identiques à leur conjuguée (¹).

226. On peut signaler d'abord une solution évidente du problème ainsi posé. Considérons la développable circonscrite à une surface réelle quelconque, transcendante ou algébrique, et au cercle imaginaire de l'infini. Cette développable sera, en général, indécomposable et, comme elle est définie par des équations réelles, son arête de rebroussement sera une courbe minima qui coïncidera avec sa conjuguée et donnera, par conséquent, naissance à une surface double réelle.

Soit

$$F(U, V, W, P) = 0 \tag{7}$$

l'équation tangentielle homogène d'une surface réelle quelconque.

(¹) On peut ajouter les remarques suivantes relatives au cas où la courbe (D) peut être amenée par une translation à coïncider avec sa conjuguée. Si la translation qui amène (D) en coïncidence avec (D') est réelle, la surface minima correspondante le sera aussi. Soient en effet, a, b, c les quantités réelles qui sont les composantes de la translation. A un point $M(x, y, z)$ de (D) correspond un point N de (D') dont les coordonnées sont

$$x+a, \quad y+b, \quad z+c.$$

Le point N', imaginaire conjugué de ce point, se trouvera évidemment sur la courbe (D) conjuguée de (D') et il aura pour coordonnées

$$x_0+a, \quad y_0+b, \quad z_0+c,$$

x_0, y_0, z_0 désignant les quantités conjuguées de x, y, z. Il suit de là que le milieu de la droite MN' qui est une corde de (D) sera réel et décrira une nappe réelle de la surface.

Si la translation qui amène (D) sur (D') est imaginaire, la surface ne sera pas nécessairement réelle. Considérons, par exemple, la courbe (D) définie par les équations

$$x = i\cos t, \quad y = i\sin t, \qquad z = t+\alpha+\beta i.$$

Cette hélice peut être amenée à coïncider avec sa conjuguée par une translation $\pi - 2\beta i$ parallèle à l'axe des z. La surface lieu des milieux de ses cordes n'est réelle que si la constante β est nulle.

L'équation d'un plan tangent au cercle de l'infini est

$$(8)\qquad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2\xi = 0.$$

Exprimons que ce plan est aussi tangent à la surface, nous aurons l'équation

$$(9)\qquad F[1-u^2,\ i(1+u^2),\ 2u,\ 2\xi] = 0,$$

ou plus simplement, en tenant compte de l'homogénéité,

$$\Phi\left[\frac{1}{u} - u,\ i\left(\frac{1}{u} + u\right),\ \frac{\xi}{u}\right] = 0,$$

le symbole Φ désignant une fonction réelle quelconque. La valeur de ξ tirée de cette équation sera la fonction $f(u)$ qui figure dans les formules (5). En changeant i en $-i$, on aura la fonction conjuguée $f_1(u)$ et la surface minima correspondante sera pleinement déterminée.

Supposons, par exemple, que l'on considère la développable circonscrite à la fois au cercle de l'infini et à la parabole dont l'équation tangentielle est

$$U^2 = WP.$$

On aura ici

$$4uf(u) = (1-u^2)^2$$

et, par conséquent,

$$f(u) = \frac{(1-u^2)^2}{4u} = f_1(u).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (18) [p. 289], on aurait les équations qui déterminent la surface. C'est la plus simple des surfaces minima doubles; elle a été découverte par M. L. Henneberg ([1]). Nous la retrouverons plus loin.

227. On peut se placer à un autre point de vue dans la recherche des surfaces doubles et se demander, par exemple, à quelle con-

---

([1]) Henneberg (L.), *Ueber solche Minimalflächen welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben.* Zürich, 1875.

Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur geodatischen Linie hat (*Vierteljahrschrift der Zürcher Naturf. Ges.*, t. XXI).

Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen (*Annali di Matematica*, 2e série, t. IX, p. 54; 1877).

dition doivent satisfaire, si la surface est double, les fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u_1)$ de M. Weierstrass. Si nous considérons les deux courbes

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du, \\ y &= \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du, \\ z &= \int u\,\mathfrak{F}(u)\,du, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int(1-u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ y &= -\frac{i}{2}\int(1+u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ z &= \int u_1\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \end{aligned}\right.$$

dont la translation engendre la surface, il faut exprimer que l'une d'elles se déduit de l'autre par une simple translation, c'est-à-dire que l'on peut prendre pour u_1 une fonction de u permettant de satisfaire aux relations

$$\begin{aligned} (1-u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du &= (1-u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ i(1+u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du &= -i(1+u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \\ u\,\mathfrak{F}(u)\,du &= u_1\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1. \end{aligned}$$

En divisant membre à membre, on trouve les deux égalités

$$\frac{1-u^2}{1-u_1^2} = -\frac{1+u^2}{1+u_1^2} = \frac{u}{u_1},$$

qui donnent

$$u_1 = -\frac{1}{u}.$$

Si l'on porte cette valeur de u_1 dans l'une quelconque des équations précédentes, on obtient la relation

$$(12) \qquad \mathfrak{F}_1(u_1)\,u_1^4 = -u^4\,\mathfrak{F}(u),$$

que l'on peut mettre aussi sous la forme

$$\mathfrak{F}(u) = -\frac{1}{u^4}\,\mathfrak{F}_1\left(-\frac{1}{u}\right).$$

C'est la condition cherchée, et le raisonnement prouve bien qu'elle est suffisante.

Si l'on applique un raisonnement analogue au cas où les deux courbes sont définies par leurs plans osculateurs

$$\begin{aligned} (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) &= 0, \\ (1-u_1^2)x - i(1+u_1^2)y + 2u_1 z + 2f_1(u_1) &= 0, \end{aligned}$$

on trouvera, *en exprimant que ces deux plans coïncident,* les relations

$$(13) \qquad u_1 = -\frac{1}{u}, \qquad \frac{f(u)}{u} = \frac{f_1(u_1)}{u_1}.$$

Le problème de la recherche des surfaces doubles est ainsi complètement résolu.

228. Si l'on veut que la surface double soit réelle, il faudra que les deux fonctions f et f_1 ou $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ soient conjuguées. On est ainsi conduit à une équation fonctionnelle dont la solution est d'ailleurs très facile.

Posons en effet

$$\frac{f(u)}{u} = \Theta(u),$$

et désignons par $\Theta_1(u)$ la fonction conjuguée de $\Theta(u)$. On devra avoir

$$\Theta(u) = \Theta_1\left(-\frac{1}{u}\right).$$

Mettons en évidence la partie réelle $P(u)$ et la partie imaginaire $iQ(u)$ de la fonction Θ. Nous aurons

$$P(u) = \quad P\left(-\frac{1}{u}\right),$$
$$Q(u) = -Q\left(-\frac{1}{u}\right)$$

et, par conséquent,

$$P(u) = p(u) + p\left(-\frac{1}{u}\right),$$
$$Q(u) = q(u) - q\left(-\frac{1}{u}\right),$$

les symboles p et q désignant des fonctions réelles, d'ailleurs quelconques. On déduit de là, pour $\Theta(u)$, l'expression

$$\Theta(u) = p(u) + p\left(-\frac{1}{u}\right) + iq(u) - iq\left(-\frac{1}{u}\right)$$

ou, plus simplement,

$$(14) \qquad \frac{f(u)}{u} = \Theta(u) = \varphi(u) + \varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

φ désignant une fonction imaginaire quelconque $p(u) + iq(u)$ et φ_1 la fonction conjuguée de φ.

On trouverait de même pour $\mathcal{F}(u)$ l'expression analogue

$$(15) \qquad u^2 \mathcal{F}(u) = \varphi(u) - \varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right).$$

En s'appuyant sur les résultats précédents, on peut démontrer que le procédé indiqué au n° **226** donne la courbe minima la plus générale coïncidant avec sa conjuguée. Prenons en effet l'équation du plan osculateur de cette courbe sous la forme

$$x\left(u - \frac{1}{u}\right) + iy\left(u + \frac{1}{u}\right) + 2z + 2\varphi(u) + 2\varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right) = 0,$$

où l'on a remplacé $f(u)$ par sa valeur tirée de l'équation (14). En identifiant l'équation précédente avec celle d'un plan quelconque

$$Ux + Vy + Wz + P = 0,$$

on trouve

$$\frac{U + iV}{2W} = -\frac{1}{u}, \qquad \frac{U - iV}{2W} = u, \qquad \frac{P}{W} = \varphi(u) + \varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right)$$

et, par conséquent,

$$\frac{P}{W} = \varphi\left(\frac{U - iV}{W}\right) + \varphi_1\left(\frac{U + iV}{W}\right).$$

Cette équation définit évidemment une surface réelle à laquelle sera circonscrite la développable, enveloppe des plans osculateurs de la courbe considérée.

229. Jusqu'ici nous avons employé les formules de M. Weierstrass, qui sont parfaitement appropriées à l'étude des surfaces réelles. Dans la théorie des surfaces doubles, où il s'agit de comparer les deux courbes minima dont la translation engendre la surface, il sera avantageux de représenter les deux courbes minima de la même manière et de les considérer respectivement comme les enveloppes des deux plans

$$(1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0,$$
$$(1 - u_1^2)x + i(1 + u_1^2)y + 2u_1z + 2f_1(u_1) = 0.$$

Alors les deux plans seront parallèles si l'on a $u_1 = u$, et les deux courbes seront identiques si l'on a

$$f_1(u) = f(u).$$

Les formules qui définissent un point de la surface seront les suivantes ([1])

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u) \\ &\quad + \frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1), \\ y &= i\frac{1+u^2}{2}f''(u) - iuf'(u) + if(u) \\ &\quad + i\frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1) - iu_1 f_1'(u_1) + if_1(u_1), \\ z &= uf''(u) - f'(u) + u_1 f_1''(u_1) - f_1'(u_1), \end{aligned}\right.$$

et le plan tangent aura pour équation

$$(17)\quad (1 - uu_1)X + i(1 + uu_1)Y + (u + u_1)Z + \xi = 0,$$

ξ ayant pour valeur

$$(18)\quad \xi = 2f(u) + 2f_1(u_1) - (u - u_1)[f'(u) - f_1'(u_1)].$$

C'est l'équation de la surface écrite dans le système (α, β, ξ) qui a été défini et étudié aux n°s 164, 166. Elle se prête de la manière la plus simple à l'étude des surfaces doubles.

Dans ce cas, nous venons de le voir, on aura

$$(19)\quad f(u) = f_1(u),$$

et, par conséquent, ξ sera une fonction symétrique de u et de u_1.

Réciproquement, exprimons que ξ est une fonction symétrique de u et de u_1. Nous devrons avoir

$$\begin{aligned} 2f(u) + 2f_1(u_1) - (u - u_1)[f'(u) - f_1'(u_1)] \\ = 2f(u_1) + 2f_1(u) - (u - u_1)[f_1'(u) - f'(u_1)]. \end{aligned}$$

Posons

$$f(u) - f_1(u) = 2\theta(u),$$

([1]) Ces formules sont, aux notations près, celles qui ont été données par Björling dans le Mémoire analysé plus haut [p. 279].

l'équation précédente ne contiendra plus que $\theta(u)$ et deviendra

$$2\theta(u) - 2\theta(u_1) - (u - u_1)[\theta'(u) + \theta'(u_1)] = 0.$$

La seule fonction satisfaisant à cette équation est un polynôme du second degré, mais il est inutile de la rechercher. Car, si l'on introduit la notation

$$f(\alpha) - \theta(\alpha) = f_1(\alpha) + \theta(\alpha) = \varphi(\alpha),$$

l'expression de ξ devient

$$\xi = 2\varphi(u) + 2\varphi(u_1) - (u - u_1)[\varphi'(u) - \varphi'(u_1)],$$

et nous trouvons l'équation tangentielle d'une surface double, qui correspond à la fonction $\varphi(u)$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on emploie le système de coordonnées tangentielles dans lequel on écrit l'équation d'un plan sous la forme

$$(20) \qquad (1 - \alpha\beta)X + i(1 + \alpha\beta)Y + (\alpha + \beta)Z + \xi = 0,$$

l'équation tangentielle des surfaces minima sera

$$(21) \qquad \xi = 2f(\alpha) + 2f_1(\beta) - (\alpha - \beta)[f'(\alpha) - f_1'(\beta)].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit double est que ξ soit une fonction symétrique de α et de β.

230. Nous sommes ainsi conduits à étudier d'une manière générale la distinction que l'on doit établir entre les surfaces dont l'équation tangentielle est symétrique par rapport à α et à β, et celles dont l'équation n'est pas symétrique par rapport à ces variables.

Envisageons une surface algébrique quelconque, représentée par l'équation tangentielle indécomposable

$$(22) \qquad F(U, V, W, P) = 0;$$

si l'on y remplace U, V, W, P par leurs expressions en α, β, ξ, on aura l'équation

$$(23) \qquad F[1 - \alpha\beta,\ i(1 + \alpha\beta),\ \alpha + \beta,\ \xi] = 0,$$

qui est symétrique en α et β. Mais il peut arriver que, l'équation (22) étant indécomposable, il n'en soit pas de même de la précédente.

Supposons, en effet, que l'équation (22) se présente sous la forme

$$(24)\qquad f^2(U, V, W, P) - (U^2 + V^2 + W^2)\varphi^2(U, V, W, P) = 0,$$

l'équation (23) deviendra

$$f_1^2(\alpha, \beta, \xi) - (\alpha - \beta)^2 \varphi_1^2(\alpha, \beta, \xi) = 0$$

et se décomposera dans les deux suivantes

$$f_1(\alpha, \beta, \xi) - (\alpha - \beta)\varphi_1(\alpha, \beta, \xi) = 0,$$
$$f_1(\alpha, \beta, \xi) + (\alpha - \beta)\varphi_1(\alpha, \beta, \xi) = 0,$$

qui ne sont plus symétriques, mais qui se ramènent l'une à l'autre quand on échange α et β. Elles donnent, l'une et l'autre, tous les plans tangents de la surface, mais avec des sens opposés pour la normale.

Réciproquement, considérons une surface définie par l'équation

$$(25)\qquad f(\alpha, \beta, \xi) = 0,$$

irréductible par rapport à ξ. Si cette équation n'est pas symétrique par rapport à α, β, on sera conduit, avec les variables U, V, W, P, à une équation tangentielle de la forme (24) qui permettra d'exprimer le radical $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ en fonction rationnelle de U, V, W, P ou, ce qui est la même chose, des coordonnées du point de contact.

Si, au contraire, l'équation (25) est symétrique par rapport à α et à β, il sera impossible d'exprimer rationnellement le radical en fonction de U, V, W, P. Si l'on avait, en effet,

$$(26)\qquad \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} = \frac{f(U, V, W, P)}{\varphi(U, V, W, P)},$$

nous trouverions, en remplaçant U, V, W, P en fonction de α, β, ξ,

$$(\alpha - \beta)\varphi_1(\alpha, \beta, \xi) = \pm f_1(\alpha, \beta, \xi),$$

f_1 et φ_1 étant symétriques en α et β. Or il est impossible que cette équation soit vérifiée par les valeurs de ξ racines de l'équa-

tion irréductible proposée, à moins que ces racines n'annulent à la fois f_1 et φ_1. Alors la valeur du radical donnée par l'équation (26) se présenterait constamment sous la forme $\frac{0}{0}$ et cette équation n'aurait aucun sens.

En appliquant ces remarques aux surfaces minima, nous obtenons la proposition suivante :

Pour qu'une surface minima soit simple, il faut et il suffit que son équation tangentielle puisse être ramenée à la forme (24); *si elle est déterminée par une équation en coordonnées ponctuelles* $f(x, y, z) = 0$, *il faut et il suffit que les deux déterminations du radical*

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

soient des fonctions distinctes l'une de l'autre, c'est-à-dire que le radical soit un carré parfait.

Considérons, par exemple, l'alysséide qui est définie par l'équation

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)^2.$$

On a ici

$$\Delta = \pm\sqrt{4x^2 + 4y^2 + \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2z}{a}} - e^{-\frac{2z}{a}}\right)^2} = \pm\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)^2.$$

L'alysséide est donc une surface simple.

Nous pouvons maintenant compléter les remarques présentées au n° 192 sur la représentation d'une surface minima par les formules de M. Weierstrass. Bornons-nous, pour plus de netteté, aux surfaces réelles. Nous avons vu qu'à une même surface on peut faire correspondre deux fonctions différentes

$$\mathcal{F}(u) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{u^4}\mathcal{F}_1\left(\frac{-1}{u}\right).$$

Les résultats obtenus au n° 227 nous montrent que ces deux fonctions ne seront pas distinctes, dans le cas des surfaces doubles, ou, plutôt, ce seront deux branches différentes d'une même fonction. Si, au contraire, la surface est simple, ces deux fonctions seront

irréductibles l'une à l'autre et nous aurons deux fonctions différentes d'une même variable imaginaire se rapportant à la même surface. Ces deux fonctions correspondront aux deux courbes minima distinctes dont la translation peut engendrer la surface.

231. C'est ici le lieu de présenter quelques remarques sur les surfaces dont l'équation tangentielle est de la forme

$$\varphi^2 - (U^2 + V^2 + W^2)\psi^2 = 0.$$

Le radical $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ étant une fonction rationnelle de U, V, W, P et, par conséquent, des coordonnées du point de contact, on voit qu'il est possible d'attribuer aux normales en tous les points de ces surfaces un sens bien déterminé. Si l'on prend, par exemple,

$$\frac{U\psi}{\varphi}, \quad \frac{V\psi}{\varphi}, \quad \frac{W\psi}{\varphi},$$

pour les cosinus directeurs de chaque normale, et si l'on décrit sur la surface un chemin quelconque pour revenir au point de départ, on y reviendra toujours avec les mêmes valeurs pour les cosinus directeurs. En d'autres termes, *il sera possible de distinguer analytiquement deux côtés de la surface*. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas de la sphère ou dans celui de la surface de quatrième classe déjà considérée au n° 159.

Supposons, au contraire, qu'il soit impossible d'obtenir pour $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ une expression rationnelle en fonction des coordonnées, soit ponctuelles, soit tangentielles; les cosinus directeurs de la normale,

$$\frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \quad \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}, \quad \frac{W}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}},$$

changeront certainement de signe lorsqu'on suivra sur la surface un chemin *réel ou imaginaire* convenablement choisi. Seulement il y a lieu, dans ce cas encore, de faire une distinction très essentielle. Pour certaines surfaces telles que l'ellipsoïde, le paraboloïde, les hyperboloïdes, si l'on revient au point de départ après avoir parcouru un chemin *réel* quelconque, on retrouvera toujours le même sens pour la normale. En d'autres termes, si l'on imagine une petite sphère parcourant le chemin considéré,

elle se trouvera, au retour, du même côté de la surface qu'au départ. Möbius a remarqué le premier qu'il existe un grand nombre de surfaces telles que le sens de la normale se trouve changé quand on revient au point de départ après avoir parcouru un chemin réel convenablement choisi. Bornons-nous, pour plus de simplicité, à considérer les surfaces algébriques. Il faut évidemment, pour que la circonstance précédente se présente, que la surface ait des lignes multiples réelles.

Considérons, en effet, la surface parallèle à la proposée, obtenue en portant sur les normales des longueurs infiniment petites égales à μ. Tant que $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ ne sera pas un carré parfait, les deux nappes dont se compose cette surface ne constitueront analytiquement qu'une seule surface et, si l'on considère les deux points m, m', situés sur la normale en un point M de la surface donnée, il sera toujours possible de suivre sur la surface parallèle un chemin réel ou imaginaire qui conduise de m à m'. Mais, si ce chemin est entièrement réel, la fonction

$$\varphi(x, y, z),$$

qui, égalée à zéro, donne l'équation de la surface proposée, aura évidemment changé de signe quand on passera de m à m'. Comme ce chemin est parallèle à une nappe de la surface, il faudra nécessairement qu'il en traverse au moins une autre et, par conséquent, que la surface proposée ait une ligne multiple ou, au moins, un point multiple.

Il est remarquable que la surface la plus simple possédant une ligne multiple jouisse de la propriété singulière que nous étudions ici. Cette surface est la surface réglée du troisième ordre dont nous indiquons ici la forme (*fig.* 18). Si l'on part du point m en suivant le chemin $mkl\mu srm$, on reviendra au point de départ après avoir changé de côté [1].

---

[1] Cet exemple nous avait été indiqué par H.-S. Smith, professeur Savilien à Oxford, dont tous les géomètres déplorent la mort prématurée. Les différentes surfaces réglées du troisième ordre sont les transformées homographiques de celle qui est représentée par l'équation

$$zx^2 = y^2.$$

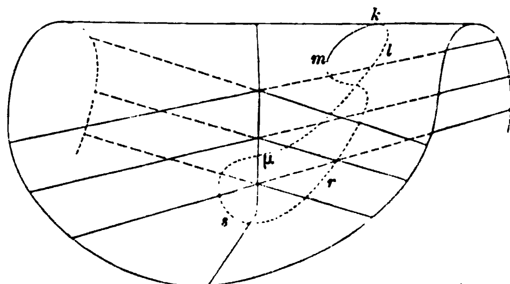
La figure se rapporte à la surface dont l'équation est

$$x^2(1 - z) = zy^2.$$

A cet exemple si simple d'une surface réelle *n'ayant pas de côté* on peut en ajouter beaucoup d'autres très généraux.

Prenons, par exemple, une courbe fermée réelle (K) choisie de telle manière qu'elle admette seulement un nombre limité de couples de tangentes parallèles. Si l'on part d'un point quelconque A de cette courbe avec un sens déterminé pour la tangente, la loi de continuité déterminera le sens de cette droite pour tous les autres

Fig. 18.



points de la courbe. Par conséquent, si x, y, z sont les coordonnées d'un point de la courbe, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ seront des fonctions parfaitement déterminées en chaque point réel de la courbe. Soient maintenant M, M′ deux points quelconques de la courbe et prenons le lieu des milieux de la corde MM′. La normale au point milieu de MM′ aura pour cosinus directeurs

$$\frac{\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'}-\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'}}{\Delta},\quad \frac{\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'}-\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'}}{\Delta},\quad \frac{\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'}-\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'}}{\Delta},$$

Δ désignant la quantité

$$\Delta=\sqrt{1-\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)^2},$$

que nous prendrons, par exemple, avec le signe +. Faisons maintenant tourner la corde MM′, de manière que M vienne en M′ et M′ en M, mais en évitant, ce qui est toujours possible, la coïncidence de M et de M′ et aussi les positions de la corde en nombre limité, pour lesquelles les tangentes en M et en M′ sont parallèles

Nous suivrons sur la surface lieu des milieux un chemin réel pour chaque point duquel le plan tangent sera bien déterminé et, quand nous reviendrons au point de départ, l'échange de M et de M′ aura fait changer le signe des cosinus directeurs de la normale ([1]).

232. Considérons maintenant une surface minima double *algébrique ou du moins non périodique*, et soit

$$(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0$$

l'équation du plan osculateur de la courbe minima au moyen de laquelle s'engendre la surface. Soient M, M_1 deux points de cette courbe. Le milieu m de la corde MM_1 décrira la surface considérée. Soient u et u_1 les valeurs du paramètre u relatives aux points M et M_1. Les cosinus directeurs de la normale en m auront pour expressions

$$\frac{1-uu_1}{u-u_1}, \quad i\frac{1+uu_1}{u-u_1}, \quad \frac{u+u_1}{u-u_1},$$

et ils ne seront réels (n° 15) que si l'on a

$$u_1 = -\frac{1}{u'},$$

u' étant l'imaginaire conjuguée de u. De plus, dans le cas qui nous occupe, où la surface n'est pas périodique, il faudra, pour que le point m de la surface soit réel, que l'on associe à la détermination $f_0(u)$ de $f(u)$, relative au point M, une détermination $f_0(u_1)$ de $f(u_1)$ complètement définie par cette condition que le point M_1 soit imaginaire conjugué de M. Ainsi, à chaque système de valeurs de u et de $f(u)$ correspond un point réel de la surface et un seul.

Faisons maintenant varier u de telle manière qu'il devienne

([1]) On rapprochera les remarques que nous avons présentées dans cet article de celles que Laguerre, notre regretté confrère et ami, a développées dans une suite de travaux intéressants sur la *Géométrie de direction*. (*Voir*, en particulier, le Mémoire *Sur la Géométrie de direction* publié en 1880 dans le tome VIII du *Bulletin de la Société mathématique de France*, p. 196, et différents articles insérés dans les *Comptes rendus* en 1881, 1882 et 1883.)

égal à u_1 et choisissons, en outre, pour cette variable complexe, un chemin tel que la détermination primitive $f_0(u)$ de $f(u)$ devienne égale à la détermination primitive $f_0(u_1)$ de $f(u_1)$. Le point M de la courbe minima sera venu coïncider avec le point imaginaire conjugué M_1 et, par conséquent, le point M_1 sera venu en M. On reviendra donc au même point m de la surface minima. D'ailleurs, dans le chemin réel que l'on aura suivi sur la surface, les cosinus directeurs de la normale auront varié d'une manière continue ; car on n'a jamais

$$u = u_1,$$

c'est-à-dire

$$uu' + 1 = 0.$$

Quand on reviendra au point de départ, on aura échangé les valeurs de u et de u_1 ; les cosinus directeurs de la normale auront changé de signe, comme le montrent les expressions données plus haut de ces cosinus, et l'on se trouvera sur le côté opposé à celui d'où l'on était parti (1).

---

(1) SCHILLING, *Die Minimalflächen fünfter Klasse mit dem Stereoscop-Bild eines Modells derselben*. Gœttingue, 1880.

Cet intéressant travail contient non seulement une démonstration de la proposition que nous venons d'établir, mais encore une étude très détaillée de la surface de M. Henneberg. M. Schilling en détermine l'ordre, la classe, les singularités principales et il montre qu'elle est le lieu des milieux de la courbe minima définie par les équations

$$x = \left(\frac{1 - u^2}{u}\right)^3, \qquad y = i\left(\frac{1 + u^2}{u}\right)^3, \qquad z = 3\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right).$$

Elle correspond à la valeur

$$\mathfrak{F}(u) = 3\left(1 - \frac{1}{u^4}\right) = 3\left(u - \frac{1}{u}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}$$

de la fonction de M. Weierstrass. Cela nous conduit à signaler les surfaces doubles correspondantes à la valeur plus générale

$$\mathfrak{F}(u) = \left(\frac{1}{u} - u\right)^\alpha \left(\frac{1}{u} + u\right)^\beta \frac{1}{u^2},$$

où β désigne un nombre impair.

CHAPITRE VII.

LES SURFACES MINIMA ALGÉBRIQUES.

Détermination de la classe et de l'ordre de la surface minima algébrique engendrée par la translation de deux courbes minima données. — Application au cas particulier où la fonction $f(u)$ est rationnelle. — Détermination de la surface minima réelle, simple ou double, de la classe la moins élevée. — Points à l'infini des surfaces minima. — La section de la surface par le plan de l'infini se compose exclusivement de droites simples ou multiples. — Points multiples à distance finie. — Surfaces minima à point conique.

---

233. Après avoir exposé, en suivant les méthodes de M. Lie, la solution des problèmes les plus élémentaires de la théorie, nous allons indiquer comment cet éminent géomètre a déterminé l'ordre et la classe d'une surface minima algébrique, lorsqu'on suppose données les deux courbes minima dont la translation peut engendrer la surface.

La détermination de la classe repose sur le théorème suivant, qui est un cas particulier d'une proposition générale déjà énoncée au n° 84 et relative aux surfaces engendrées par la translation d'une courbe invariable.

La développable circonscrite à la surface en tous les points de une des courbes minima dont la translation engendre cette surface est un cylindre dont les génératrices vont rencontrer le cercle de l'infini.

Soient (γ) la courbe minima donnée, m un de ses points et (γ_1) la seconde courbe minima de la surface passant par le point m. La tangente en m à (γ_1) est une des génératrices du cylindre circonscrit suivant (γ).

Ce point étant rappelé, considérons le cône circonscrit à la surface ayant pour sommet un point quelconque μ du cercle de l'infini; soit μm une génératrice du cône, tangente en m à la surface. Il passe en m deux courbes minima de la surface (γ), (γ_1) dont

l'une, que nous désignerons par (γ_1), est tangente à μm; et il résulte du théorème précédent que la développable circonscrite à la surface suivant (γ) est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à μm, c'est-à-dire un cône de sommet μ. Donc :

Le cône circonscrit à la surface minima, ayant son sommet en un point quelconque du cercle de l'infini, se décompose en cônes plus simples dont chacun est circonscrit à la surface suivant une courbe minima.

Ce point étant admis, commençons par considérer une surface simple et soit μ un point du cercle de l'infini. Désignons par (K) et (K') les deux courbes différentes dont la translation peut engendrer la surface. Les génératrices du cône circonscrit suivant une des positions de (K') sont tangentes aux diverses positions de la courbe (K). Le nombre des cônes de sommet μ, circonscrits chacun suivant une des positions de (K'), sera donc égal au nombre des tangentes que l'on peut mener du point μ à l'une des positions de la courbe (K). Ce nombre, que nous désignerons par M, est évidemment l'ordre de multiplicité du cercle de l'infini sur la développable formée par les tangentes de (K). *Il y a donc* M *cônes de sommet* μ *circonscrits suivant une des positions de* (K') *et* M' *cônes de même sommet circonscrits suivant une des positions de* (K), M *et* M' *désignant les ordres de multiplicité du cercle de l'infini sur les développables formées par les tangentes aux deux courbes.* La classe de la surface sera celle de cet ensemble de cônes.

Envisageons l'un des cônes circonscrits suivant une position de (K'), par exemple, et soit (d) une droite *quelconque* passant par le sommet μ de ce cône. Pour qu'un plan tangent à ce cône contienne la droite (d), il est nécessaire et suffisant que la tangente à la courbe (K'), menée au point de contact de ce plan et de la surface minima, rencontre la droite (d) en un point situé à distance finie. La classe du cône est donc égale au nombre des tangentes de (K') qui viennent rencontrer la droite (d) à distance finie. Or ces tangentes forment une développable dont l'ordre, que nous désignerons par R', a reçu, comme on sait, le nom de *rang* de la courbe. Cette développable est déjà coupée par la droite (d) au point μ, qui est multiple d'ordre M'. Elle rencontrera

donc la droite (d) en $R' - M'$ points à distance finie et, par suite, la classe du cône considéré sera

$$R' - M'.$$

On trouvera de même $R - M$, R étant le nombre analogue à R', pour la classe du cône circonscrit suivant une position de la courbe (K). La classe de la surface, c'est-à-dire celle de l'ensemble des cônes définis précédemment, sera donc

$$M(R' - M') + M'(R - M).$$

Tel est le nombre obtenu par M. Lie.

Dans le cas où la surface minima est double, il n'y a plus lieu de distinguer deux séries de cônes circonscrits et la classe devient égale à

$$M(R - M),$$

les nombres R et M se rapportant à la courbe unique dont la translation engendrera deux fois la surface.

Si la surface est simple et réelle, les deux courbes dont la translation engendre la surface sont imaginaires conjuguées. On a évidemment

$$M' = M, \qquad R' = R,$$

et la classe de la surface sera

$$2M(R - M).$$

On voit que toutes les surfaces minima réelles dont l'ordre est premier ou impair sont nécessairement doubles.

Nous signalerons une relation d'inégalité à laquelle satisfont les nombres R et M relatifs à toute courbe minima. La développable formée par les tangentes à cette courbe est coupée par une droite située à l'infini en deux points au moins, qui sont situés sur le cercle de l'infini et sont multiples d'ordre M. On a donc

$$(1) \qquad R \geq 2M, \qquad R - M \geq M.$$

Il résulte de cette inégalité que, dans l'expression $M(R - M)$ de la classe d'une surface double, le plus grand facteur ne peut être que $R - M$. Si la classe est un nombre premier p, on aura nécessairement

$$M = 1, \qquad R - M = p,$$

ce qui donne

$$R = p + 1.$$

234. Passons maintenant à la détermination de l'ordre de la surface, qui se fait d'ailleurs d'une manière moins précise. Nous couperons la surface par une droite (d) assujettie à la seule condition de ne pas rencontrer la surface à l'infini. Supposons d'abord, pour plus de netteté, que cette droite ait été choisie pour axe des z. Ses points d'intersection avec la surface seront déterminés par les deux équations

$$A(t) + A_1(\tau) = 0,$$
$$B(t) + B_1(\tau) = 0.$$

Si l'on construit les deux courbes planes définies par les équations

$$(\gamma) \qquad x = A(t), \qquad y = B(t)$$

et

$$(\gamma') \qquad x = -A_1(\tau), \qquad y = -B_1(\tau),$$

le problème sera ramené à la recherche de ceux de leurs points communs qui sont à distance finie. Soient (K) et (K′) les deux courbes dont la translation engendre la surface. La courbe (γ) sera la projection de (K) sur le plan des xy; (γ') sera la symétrique, par rapport à l'origine, de la projection de (K′) sur le même plan. Les ordres de (γ) et de (γ') seront les mêmes, en général, que ceux de (K) et de (K′). Si donc nous désignons ces ordres par m et m', le nombre des intersections cherchées, égal à l'ordre de la surface, sera, en général,

$$mm'.$$

Toutefois, si les courbes (K) et (K′) ont des points communs à l'infini, il en sera de même de leurs projections. Soit ω le nombre des points à l'infini que l'on déterminera par les méthodes connues [1]. Dans ce cas l'ordre de la surface sera

$$mm' - \omega.$$

---

[1] *Voir*, en particulier, les différents travaux de M. Halphen insérés dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, le *Journal de Liouville* et la traduction française des *Courbes planes* de M. Salmon.

Enfin, si la surface est double, chaque point de la surface correspondra à deux systèmes de valeurs de t et de τ, car les véritables paramètres de chaque point sont les fonctions symétriques $t+\tau$, $t\tau$ (nº **224**). Le nombre précédent devra être réduit de moitié et l'ordre aura pour expression

$$\frac{1}{2}(mm' - \omega).$$

Si l'on veut éviter le changement d'axes, qui consiste à prendre pour axe des z la droite donnée, on écrira les équations de cette droite sous la forme

$$x = mz + p,$$
$$y = nz + q,$$

et l'on sera conduit à considérer le système

$$A(t) + A_1(\tau) = m[C(t) + C_1(\tau)] + p,$$
$$B(t) + B_1(\tau) = n[C(t) + C_1(\tau)] + q,$$

c'est-à-dire à déterminer le nombre des points d'intersection des deux courbes.

(2) $$x = A(t) - mC(t) - p, \qquad y = B(t) - nC(t) - q$$

et

(3) $$x = mC_1(\tau) - A_1(\tau), \qquad y = nC_1(\tau) - B_1(\tau).$$

Les résultats précédents, relatifs à l'ordre et à la classe, peuvent être vérifiés dans chacun des exemples que nous avons étudiés. Considérons, par exemple, la surface d'Enneper. Les courbes (K) et (K′) sont ici des cubiques gauches définies par les équations

$$x = 3u - u^3,$$
$$y = \pm i(3u + u^3),$$
$$z = 3u^2.$$

On a

$$M' = M = 1, \qquad R = R' = 4, \qquad m = m' = 3, \qquad \omega = 0.$$

La surface est simple, d'ailleurs; son ordre sera 9 et sa classe 6, comme nous l'avons déjà reconnu (nº **207**).

235. M. Lie a fait une application détaillée des méthodes pré-

cédentes aux surfaces engendrées par des courbes minima dont les tangentes forment une développable contenant une seule fois le cercle de l'infini.

Si l'on prend l'équation du plan osculateur à la courbe minima sous la forme

$$(4) \qquad (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0,$$

$f(u)$, étant ici une fonction algébrique de u, sera déterminée par une équation de la forme

$$F[f(u), u] = 0.$$

Le degré de cette équation par rapport à $f(u)$ donne évidemment l'ordre de multiplicité du cercle de l'infini sur la développable dont la courbe minima est l'arête de rebroussement. Dans le cas que nous voulons étudier, cette équation sera donc du premier degré et $f(u)$ sera une fonction rationnelle de u. Les résultats obtenus au n° **198** en ce qui concerne la transformation des coordonnées nous montrent d'ailleurs que, si les axes sont quelconques, le degré du numérateur de $f(u)$ sera supérieur de deux unités seulement à celui du dénominateur. On pourra donc poser

$$(5) \quad f(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma + \sum\left[\frac{A_{i,m_i}}{(u-a_i)^{m_i}} + \frac{A_{i,m_i-1}}{(u-a_i)^{m_i-1}} + \ldots + \frac{A_{i,1}}{u-a_i}\right],$$

les termes du second degré n'auront aucune influence sur le résultat et peuvent même être supprimés si l'on imprime à la courbe une translation convenablement choisie.

Si l'on substitue cette valeur de $f(u)$ dans l'équation (4), on voit qu'il passera, par chaque point de l'espace, des plans tangents de la développable en nombre égal à

$$(6) \qquad C = \Sigma m_i + 2.$$

Ce nombre est la *classe* de la courbe : son expression ne nous est pas nécessaire, mais elle interviendra pour simplifier les formules.

Si l'on substitue les valeurs de $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u)$ dans les formules (5) [p. 342] qui donnent les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe, on reconnaît immédiatement que les termes en

$$\frac{1}{(u-a_1)^{m_1+2}}, \quad \frac{1}{(u-a_2)^{m_2+2}}, \quad \ldots$$

figurent dans les expressions de x, y, z. La courbe est donc unicursale, et le degré du dénominateur commun de x, y, z sera

$$\Sigma m_i + 2q,$$

q étant le nombre des racines a_i. Comme les numérateurs de x, y, z sont de degrés égaux ou inférieurs à celui du dénominateur commun, l'ordre O de la courbe minima sera

$$(7) \qquad O = \Sigma m_i + 2q = C + 2q - 2.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer le rang de la courbe, c'est-à-dire le nombre des génératrices de la développable qui rencontrent une droite donnée.

Une génératrice de la développable est définie par les deux équations

$$\begin{aligned} (1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) &= 0, \\ -ux + iuy + z + f'(u) &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on exprime qu'elle rencontre une droite donnée par les équations

$$\begin{aligned} Bz - Cy &= A', \\ Cx - Az &= B', \qquad AA' + BB' + CC' = 0, \\ Ay - Bx &= C', \end{aligned}$$

on est conduit à une équation de la forme

$$\begin{aligned} A[(1-u^2)f'(u) + 2uf(u)] + Bi[(1+u^2)f'(u) - 2uf(u)] \\ + 2C[uf'(u) - f(u)] + A'i(1-u^2) - B'(1+u^2) + 2iC'u = 0, \end{aligned}$$

dont le degré donnera le rang cherché. Il suffit de se reporter à l'expression de $f(u)$ pour reconnaître que ce degré est

$$(8) \qquad R = \Sigma m_i + q + 2 = C + q.$$

Telles sont les formules qui font reconnaître les deux nombres dont dépendent l'ordre et la classe de la surface minima.

236. Proposons-nous, par exemple, de déterminer, parmi les surfaces que nous étudions, celles qui ont la classe la plus faible.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de surfaces simples. La classe sera égale à

$$2[\Sigma m_i + q + 1];$$

q et m étant au moins égaux à 1, il faut prendre

$$q = m = 1;$$

on aura donc

$$f(u) = \frac{A}{u-a} + \alpha u^2 + \beta u + \gamma.$$

C'est la valeur de $f(u)$ qui correspond à la surface d'Enneper.

Si l'on veut obtenir les surfaces de huitième classe, il faudra prendre

$$\Sigma m_i + q = 3.$$

Cette équation admet l'unique solution

$$q = 1, \qquad m_1 = 2,$$

qui donne

$$f(u) = \frac{A}{(u-a)^2} + \frac{A_1}{u-a} + \alpha u^2 + \beta u + \gamma.$$

L'ordre de la surface correspondante sera 16.

237. Proposons-nous maintenant de rechercher les surfaces doubles *réelles* les plus simples. L'équation à laquelle satisfait la fonction $f(u)$ (n° 227)

$$\frac{f(u)}{u} = \frac{f_1\left(-\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u}}$$

nous montre que, dans ce cas, à chaque infini a_i correspondra un infini $-\frac{1}{a'_i}$ de même degré de multiplicité, a'_i désignant la conjuguée de a_i. Les nombres m_i étant deux à deux égaux, la somme Σm_i sera paire, ainsi que le nombre q.

La classe

$$\Sigma m_i + q + 1$$

sera donc toujours un nombre impair et, comme on a évidemment

$$\Sigma m_i + q \geq 4,$$

la classe sera au moins égale à 5. La surface double réelle la plus simple correspond donc à l'hypothèse

$$q = 2, \qquad m_1 = m_2 = 1.$$

On obtient ainsi, nous allons le reconnaître, la surface de M. Henneberg.

Au reste, on peut obtenir très simplement sous sa forme la plus générale la valeur de $f(u)$ qui correspond aux surfaces doubles réelles.

Nous avons vu, en effet, qu'à chaque infini a_i correspond un infini $-\frac{1}{a'_i}$. Choisissons dans chaque groupe, d'une manière arbitraire, l'un des infinis a_i, $-\frac{1}{a'_i}$ et réunissons tous les termes qui correspondent à ces infinis. Si nous désignons par $\varphi(u)$ l'ensemble de ces termes, la fonction

$$F(u) = f(u) - \varphi(u) + u^2\varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right),$$

où φ_1 désigne la conjuguée de φ, satisfera encore à l'équation fonctionnelle qui caractérise les surfaces doubles

$$\frac{F(u)}{u} = \frac{F_1\left(-\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u}};$$

mais, comme elle ne contient plus les infinis a_i, elle ne pourra pas contenir non plus les infinis $-\frac{1}{a'_i}$ et se réduira, par conséquent, à un polynôme du second degré que déterminera l'équation fonctionnelle précédente et qui sera de la forme

$$a(1-u^2) + ib(1+u^2) + 2cu,$$

a, b, c désignant trois constantes réelles. On pourra le faire disparaître, si l'on veut, par une translation réelle et l'on aura, dans tous les cas, l'expression

$$f(u) = \varphi(u) - u^2\varphi_1\left(-\frac{1}{u}\right) + a(1-u^2) + ib(1+u^2) + 2cu,$$

qui définira toutes les surfaces doubles réelles.

Dans le cas de la surface de M. Henneberg, on peut, en choisissant convenablement les axes, prendre

$$\varphi(u) = \frac{a}{u},$$

a étant réel, et l'on aura

$$(9) \qquad f(u) = \frac{a}{u} + au^3.$$

Si l'on applique à cette surface les méthodes indiquées plus haut pour la détermination de l'ordre, on reconnaîtra sans difficulté que les courbes désignées au n° 233 par (γ), (γ_1) sont ici symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine et qu'elles sont de l'ordre 6. Les points à l'infini étant des points simples d'intersection, il restera 30 points d'intersection à distance finie et l'ordre de la surface sera, par suite, égal à 15.

238. Considérons une courbe minima (K), pour laquelle on connaît les nombres R, M. Si on la transforme par inversion, on obtiendra une nouvelle courbe minima (K_1); soient R_1 et M_1 les nombres relatifs à cette courbe.

Une droite (d) rencontrant le cercle de l'infini coupe la développable formée par les tangentes de (K) en R — M points. L'inversion transforme la droite (d) en une droite (d_1) rencontrant également le cercle de l'infini; elle transforme la développable formée par les tangentes de (K) dans la développable formée par les tangentes de (K_1). On aura donc

$$R - M = R_1 - M_1.$$

D'autre part, considérons un cercle passant par le pôle de l'inversion; il coupera la développable formée par les tangentes de (K) en 2R points; deux de ces points sont sur le cercle de l'infini et comptent chacun pour M; enfin d'autres, en nombre que nous désignerons par Ω, sont confondus avec le pôle. Le cercle coupera donc la développable en

$$2R - 2M - \Omega$$

points à distance finie et ne coïncidant pas avec le pôle.

Si l'on applique maintenant l'inversion, le cercle se transforme en une droite quelconque et le nombre précédent devient le rang de la courbe (K_1). On a donc

$$R_1 = 2R - 2M - \Omega.$$

La valeur de R_1 sera, dans tous les cas, positive et supérieure à

quatre, car il n'existe pas de courbe dont le rang soit inférieur à ce nombre; Ω est nul si le pôle est quelconque, mais il devient égal à deux si ce pôle a été pris sur la courbe (K). On a donc, dans tous les cas,

$$2R - 2M - 2 \geq 4$$

ou

$$R - M \geq 3.$$

Cette inégalité met en évidence les résultats suivants, qui sont dus à M. Lie.

La classe d'une surface minima simple

$$M(R' - M') + M'(R - M)$$

est au moins égale à

$$3(M + M'),$$

c'est-à-dire au moins égale à 6. Parmi les surfaces simples, la surface d'Enneper est donc celle dont la classe est la plus faible.

La classe d'une surface minima double

$$M(R - M)$$

est toujours supérieure à 3M, c'est-à-dire à 3.

Si l'on considère une cubique gauche qui soit une courbe minima, elle donne effectivement une surface double de troisième classe; mais cette surface est imaginaire. En effet, une courbe minima ne peut être identique à sa conjuguée que si elle est coupée par un plan réel quelconque, en des points imaginaires conjugués deux à deux. Elle doit donc être nécessairement d'ordre pair, si la surface double, lieu des milieux de ses cordes, est réelle.

Si l'on veut que la classe de la surface soit égale à 4, il faudra, R — M étant supérieur à 3, que l'on ait

$$M = 1, \qquad R = 5.$$

Il existe effectivement une courbe minima répondant à la question. Mais nous avons déjà vu que, dans le cas où $M = 1$, la surace double réelle la plus simple est celle de M. Henneberg.

Ainsi, *il n'y a pas de surface double réelle de classe inférieure à* 5.

239. Renvoyant, pour plus de détails, en ce qui concerne la dérmination des surfaces minima de classe ou de degré donné, au

Mémoire de M. Lie, nous terminerons ce Chapitre en étudiant les nappes infinies des surfaces minima algébriques.

Dans un Mémoire inséré aux *Mathematische Annalen* (¹) M. Geiser avait établi, par une méthode intéressante et féconde, que la section de toute surface minima algébrique par le plan de l'infini ne peut se composer que de lignes droites et du cercle de l'infini. M. Lie s'est servi du mode de génération qui l'a guidé dans ses belles études pour démontrer cette proposition et la rendre plus précise encore.

Considérons en effet la surface minima comme le lieu des milieux des segments dont les extrémités M, M_1 décrivent respectivement deux courbes minima (Γ), (Γ_1). Tant que les points M, M_1 sont à distance finie, il en est de même du milieu du segment MM_1. Si l'un des points, M_1 par exemple, s'éloigne seul à l'infini, le milieu du segment s'éloigne à l'infini et vient à la limite coïncider avec M_1. Supposons maintenant que les deux points M, M_1 s'éloignent simultanément à l'infini et viennent coïncider respectivement avec deux points m, m_1 des deux courbes (Γ), (Γ_1), situés nécessairement sur le cercle de l'infini. Si les points m, m_1 sont distincts, le milieu de mm_1 sera indéterminé et pourra occuper toutes les positions sur la droite mm_1 (²). Nous obtenons ainsi ce premier résultat :

(¹) Geiser (C.-F.), *Notiz über die algebraischen Minimumsflächen* (*Mathematische Annalen*, t. III, p. 530; 1870).

(²) Soient, en effet, x, y, z, t; x', y', z', t' les coordonnées cartésiennes homogènes des deux points M, M_1. Lorsqu'ils tendent vers leurs positions limites m, m_1, ces coordonnées auront pour valeurs limites $x_0, y_0, z_0, 0$; $x'_0, y'_0, z'_0, 0$. Cela posé, les coordonnées homogènes du milieu de MM_1 ont pour expressions

$$\begin{aligned} X &= xt' + tx', \\ Y &= yt' + ty', \\ Z &= zt' + tz', \\ T &= 2tt'. \end{aligned}$$

Faisons tendre t et t' vers zéro, de telle manière que l'on ait toujours

$$t' = \lambda t,$$

λ désignant une constante. Les coordonnées de X, Y, Z, T divisées par t auront pour limites les valeurs suivantes :

$$x_0\lambda + x'_0, \quad y_0\lambda + y'_0, \quad z_0\lambda + z'_0, \quad 0,$$

qui contiennent l'arbitraire λ et définissent un point quelconque de la droite mm_1.

Toutes les droites obtenues en joignant un point à l'infini de (Γ) *à un point de* (Γ_1) *situé aussi à l'infini et distinct du premier appartiennent à la surface.*

On reconnaît ainsi que, si les deux courbes (Γ), (Γ_1) coupent le cercle de l'infini en des points distincts les uns des autres, la section de la surface par le plan de l'infini se composera exclusivement des droites qui joignent les points à l'infini de la première courbe aux points à l'infini de la seconde. Si m et m' désignent les ordres des deux courbes, ces droites seront au nombre de mm'. Comme, dans ce cas, l'ordre de la surface est précisément égal à mm', il est évident que chacune des droites sera simple.

240. Il nous reste à examiner le cas où les deux courbes (Γ), (Γ_1) ont des points communs à l'infini et où les deux extrémités du segment MM_1, dont le milieu décrit la surface minima, viennent coïncider avec l'un de ces points.

Soit

$$(1-u^2)x + i(1+u^2)y + 2uz + 2f(u) = 0 \tag{10}$$

l'équation du plan osculateur de la courbe (Γ). En joignant à cette équation ses deux premières dérivées par rapport à u,

$$-u(x-iy) + z + f'(u) = 0, \tag{11}$$

$$-x + iy + f''(u) = 0, \tag{12}$$

on aura les trois relations qui définissent, en fonction de u, les coordonnées d'un point de la courbe. Elles nous donnent

$$\left\{\begin{aligned} x - iy &= f''(u),\\ z &= uf''(u) - f'(u),\\ x + iy &= -u^2 f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

ou encore

$$\left\{\begin{aligned} x - iy &= \int \mathfrak{F}(u)\,du,\\ z &= \int u\,\mathfrak{F}(u)\,du,\\ x + iy &= -\int u^2 \mathfrak{F}(u)\,du, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

en posant

$$f'''(u) = \mathfrak{F}(u).$$

Choisissons les axes de manière que le point m de (Γ) situé à

l'infini corresponde à l'hypothèse $u = 0$, et admettons que la courbe (Γ) soit algébrique ou, du moins, présente en ce point une singularité algébrique. Alors $f(u)$ sera développable suivant les puissances croissantes de u et, si p et q désignent deux nombres entiers dont le second est positif, on pourra poser

$$f(u) = \alpha_0 u^{\frac{p}{q}} + \alpha_1 u^{\frac{p+1}{q}} + \alpha_2 u^{\frac{p+2}{q}} + \ldots = \sum_{=0} \alpha_\lambda u^{\frac{p+\lambda}{q}}.$$

Nous supposerons toujours qu'aucun des exposants $\frac{p+\lambda}{q}$ ne prend l'une des valeurs 0, 1, 2. On peut toujours, en effet, supprimer les termes correspondants à ces trois valeurs particulières des exposants en ajoutant des constantes convenablement choisies à x, y, z, comme le montre l'équation (10) du plan osculateur; et ces constantes pourront toujours disparaître *dans les formules finales* par une translation convenable des axes coordonnés.

En mettant à profit cette remarque, nous écrirons $f(u)$ sous la forme

$$(15) \qquad f(u) = \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}\left(\frac{p+\lambda}{q} - 1\right)\left(\frac{p+\lambda}{q} - 2\right)} u^{\frac{p+\lambda}{q}},$$

qui donne

$$(16) \qquad \mathcal{F}(u) = \Sigma a_\lambda u^{\frac{p+\lambda}{q} - 3}$$

et, par conséquent,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} x - iy &= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q} - 2} u^{\frac{p+\lambda}{q} - 2}, \\ z &= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q} - 1} u^{\frac{p+\lambda}{q} - 1}, \\ x + iy &= -\sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}} u^{\frac{p+\lambda}{q}}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les expressions des coordonnées d'un point de la courbe en fonction de u.

Pour que le point m, correspondant à la valeur 0 de u, soit

rejeté à l'infini, il faudra que l'un au moins des termes qui figurent dans les expressions précédentes devienne infini pour $u = 0$. On aura donc nécessairement

$$\frac{p}{q} < 2.$$

Mais il y a ici plusieurs cas à distinguer :

1° Si l'on a

$$1 < \frac{p}{q} < 2,$$

$f(u)$ et $f'(u)$ deviendront nulles pour $u = 0$. La tangente en m à la courbe (Γ) sera définie par les deux équations (10) et (11), où l'on fera $u = 0$ et qui se réduiront aux suivantes

$$x + iy = 0, \qquad z = 0;$$

elle restera donc à distance finie; il en sera de même du plan osculateur qui est représenté par la première des deux équations précédentes.

2° Si l'on a

$$0 < \frac{p}{q} < 1,$$

$f'(u)$ sera infinie, mais non $f(u)$. Le plan osculateur en m, défini par l'équation

$$x + iy = 0,$$

sera encore à distance finie; mais la tangente en m sera rejetée à l'infini et coïncidera avec la tangente en ce point au cercle de l'infini.

3° Enfin, si l'on a

$$\frac{p}{q} < 0,$$

le plan osculateur lui-même sera rejeté à l'infini; quant à la tangente, elle sera la même que dans le cas précédent.

En résumé, la courbe (Γ) ne sera tangente en m au plan de l'infini que si l'on a

$$\frac{p}{q} < 1.$$

241. Si, comme on l'a fait au n° **229**, l'on adopte pour la courbe

(Γ_1) un mode de représentation identique au précédent et si l'on pose

$$\mathcal{F}_1(u_1) = \Sigma b_{\lambda_1} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-3}, \tag{18}$$

on obtiendra des expressions des coordonnées de chaque point de la courbe en fonction de u_1 analogues aux formules (17) et l'on en déduira les expressions suivantes des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface en fonction de u et de u_1

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} X - iY &= \int \mathcal{F}(u)\,du + \int \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 \\ &= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}-2} u^{\frac{p+\lambda}{q}-2} + \sum \frac{b_{\lambda_1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-2} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q}-2}, \\ Z &= \int u\mathcal{F}(u)\,du + \int u_1 \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 \\ &= \sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}-1} u^{\frac{p+\lambda}{q}-1} + \sum \frac{b_{\lambda_1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1}, \\ X + iY &= -\int u^2\mathcal{F}(u)\,du - \int u_1^2 \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1 \\ &= -\sum \frac{a_\lambda}{\frac{p+\lambda}{q}} u^{\frac{p+\lambda}{q}} - \sum \frac{b_{\lambda_1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}}. \end{aligned}\right.$$

Le plan tangent au point (u, u_1) sera représenté (n° **229**) par l'équation

$$X + iY - uu_1(X - iY) + (u + u_1)Z + \xi = 0, \tag{20}$$

et le calcul de ξ donnera [n° **229**, formule (18)]

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \xi = {} & \sum \frac{a_\lambda u^{\frac{p+\lambda}{q}-1}}{\frac{p+\lambda}{q}-1} \left[\frac{u_1}{\frac{p+\lambda}{q}-2} - \frac{u}{\frac{p+\lambda}{q}}\right], \\ & + \sum \frac{b_{\lambda_1} u_1^{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1}}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-1} \left[\frac{u}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}-2} - \frac{u_1}{\frac{p_1+\lambda_1}{q_1}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Il est à remarquer que l'on pourrait réduire à des polynômes les séries qui constituent les seconds membres des formules (19)

et (21) en y supprimant tous les termes de degré positif, qui s'annulent et sont négligeables lorsque u et u_1 deviennent infiniment petits.

242. Les formules précédentes étant établies, supposons d'abord qu'aucune des deux courbes (Γ), (Γ_1) ne soit tangente au plan de l'infini. On aura alors

$$2 > \frac{p}{q} > 1, \qquad 2 > \frac{p_1}{q_1} > 1.$$

Lorsque u et u_1 tendront vers zéro, Z et $X + iY$ auront zéro pour limite. Quant à $X - iY$, comme il présente plusieurs termes infinis, les uns contenant u, les autres contenant u_1, il pourra prendre toutes les valeurs possibles. En égalant, en effet, la valeur de $X - iY$ à une constante quelconque, on obtient une équation qui admet des solutions pour lesquelles u et u_1 sont aussi petits qu'on le veut; car, si l'on y regarde u et u_1 comme les coordonnées rectangulaires d'un point, cette équation de condition représente une courbe qui passe à l'origine des coordonnées.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe, les points de la surface minima qui proviennent des points de (Γ) et de (Γ_1) infiniment rapprochés de m ont pour lieu géométrique la droite

$$Z = 0, \qquad X + iY = 0,$$

qui est tout entière à distance finie. L'équation (20) du plan tangent se réduit à la suivante :

$$X + iY = 0.$$

On voit qu'il est le même pour tous les points de la droite [1].

---

[1] Si l'on restitue aux courbes (Γ), (Γ_1) leur position la plus générale en leur imprimant des translations convenables, les résultats obtenus dans le texte donnent le théorème suivant, que l'on pourrait établir par la Géométrie :

Si les deux courbes (Γ), (Γ_1) ont en commun un point m du cercle de l'infini et si aucune d'elles n'est tangente à ce cercle, les points de la surface qui proviennent des portions des deux courbes infiniment voisines de m forment une droite située dans le plan des tangentes en m aux deux courbes et à égale distance de l'une et de l'autre. Le plan tangent en un point quelconque de cette droite est fixe; il contient à la fois la droite et la tangente en m au cercle de l'infini.

Supposons maintenant que l'une des courbes (Γ), (Γ_1) soit tangente en m au cercle de l'infini, c'est-à-dire que l'une au moins des fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$ soit inférieure à l'unité. Dans ce cas, les expressions de Z et de $X - iY$ contiennent, l'une et l'autre, des termes de degré négatif, et il arrivera généralement que l'une au moins de ces deux quantités deviendra infinie quand u et u_1 tendront vers zéro d'une manière quelconque.

Si une seule des fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$ est inférieure à l'unité, la coordonnée Z deviendra certainement infinie quand u et u_1 tendront vers zéro. Si, au contraire, les deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$ sont l'une et l'autre inférieures à l'unité, $X - iY$ ne pourra demeurer finie que si les termes de degré le plus faible en u et u_1 sont du même ordre, c'est-à-dire si l'on a approximativement

$$\frac{a_0 u^{\frac{p}{q}-2}}{\frac{p}{q}-2} + \frac{b_0 u_1^{\frac{p_1}{q_1}-2}}{\frac{p_1}{q_1}-2} = 0;$$

et, de même, Z ne pourra demeurer finie que si l'on a approximativement

$$\frac{a_0 u^{\frac{p}{q}-1}}{\frac{p}{q}-1} + \frac{b_0 u_1^{\frac{p_1}{q_1}-1}}{\frac{p_1}{q_1}-1} = 0.$$

Or ces deux équations ne peuvent être compatibles que si l'on a

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1},$$

et, même alors, comme elles sont de degrés différents, $2q - p$ et $q - p$, par rapport à u, il y aura toujours des solutions de l'une qui ne conviendront pas à l'autre. On peut donc affirmer que, dans le cas où l'une au moins des deux courbes minima est tangente en m au cercle de l'infini, *les points des courbes* (Γ), (Γ_1) *infiniment voisins de m ne pourront donner de point de la surface à distance finie que si l'on a* $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ *et qu'ils donneront toujours des points de la surface, situés à l'infini.* Il reste à

indiquer le lieu formé par ces derniers points. Or, si l'on se reporte à l'équation (20) du plan tangent écrite sous forme homogène

$$X + iY - uu_1(X - iY) + (u + u_1)Z + \xi T = 0.$$

on voit que, u et u_1 devenant nuls, la section de ce plan par le plan de l'infini aura pour équations

$$X + iY = 0, \qquad T = 0,$$

Les points cherchés de la surface sont évidemment distribués sur cette droite, qui est la tangente en m au cercle de l'infini. Réciproquement, chaque point de cette droite peut être obtenu pour des valeurs infiniment petites de u et de u_1; car, à chacun de ces points, correspond une valeur déterminée du rapport $\frac{Z}{X - iY}$ et l'on reconnaîtra, en répétant le raisonnement donné au début de ce numéro, que ce rapport peut prendre toutes les valeurs possibles. Ainsi :

Toutes les fois que l'une des courbes (Γ), (Γ_1) *est tangente en m au cercle de l'infini, tous les points de la surface situés à l'infini et provenant des branches voisines du point m ont pour lieu géométrique la tangente en m au cercle de l'infini.*

En réunissant les résultats précédents nous obtenons, par conséquent, la proposition suivante, qui est celle de M. Lie :

Lorsque les deux courbes (Γ), (Γ_1) *ont un point commun à l'infini, les branches de ces deux courbes voisines de m ne peuvent donner de point à l'infini de la surface que si l'une des courbes est tangente en m au cercle de l'infini; dans ce cas, tous les points à l'infini de la surface ont pour lieu géométrique la tangente en m au cercle de l'infini.*

243. Mais la méthode indiquée dans les numéros précédents nous permet aussi de résoudre une question nouvelle et, après avoir étudié la section de la surface par le plan de l'infini, de déterminer, quand ils existent, les points à distance finie de la surface qui peuvent provenir des points à l'infini situés sur les courbes (Γ), (Γ_1). Nous avons vu plus haut que cette circonstance ne peut se

présenter que si l'on a

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}.$$

Supposons cette condition remplie, et reprenons les formules déjà démontrées

$$\begin{aligned} X - iY &= \int \mathcal{F}(u)\,du + \int \mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \\ Z &= \int u\,\mathcal{F}(u)\,du + \int u_1\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1, \end{aligned}$$

qui donnent

$$(22) \qquad dZ - u\,d(X - iY) = (u_1 - u)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1.$$

Pour résoudre la question proposée, nous couperons la surface par le plan

$$X - iY = \alpha,$$

où α désigne une constante quelconque et nous chercherons s'il existe, dans ce plan, un point de la surface à distance finie provenant de valeurs infiniment petites de u et de u_1.

Si nous substituons la valeur α de $X - iY$ dans la première des formules (19), nous aurons une relation entre u et u_1 qui nous donnera pour u un certain nombre de développements en série suivant les puissances positives de u_1, développements dont les coefficients pourront contenir α, à partir d'un certain rang. Il faudra que l'une au moins de ces valeurs de u, portée dans les expressions de Z et de $X + iY$, donne des développements de ces quantités demeurant finis pour $u_1 = 0$ et ne contenant, par conséquent, aucune puissance négative de u_1. Si l'on se reporte à la formule (22) et si l'on y fait

$$X - iY = \alpha, \qquad d(X - iY) = 0,$$

on en déduira

$$\frac{dZ}{du_1} = (u_1 - u)\,\mathcal{F}_1(u_1).$$

Tous les termes de Z étant, par hypothèse, de degré positif, $\frac{dZ}{du_1}$ ne contiendra que des termes de degré supérieur à -1 et, si l'on remarque que le degré de $\mathcal{F}_1(u_1)$ est $\frac{p_1}{q_1} - 3$, on est conduit à l'inégalité

$$\text{degré}\,(u - u_1) + \frac{p_1}{q_1} - 3 > -1,$$

qui donne

(23) $$u - u_1 = \theta u_1^{2-\frac{p_1}{q_1}},$$

θ étant une fonction de u_1 qui s'annule pour $u_1 = 0$.

Portons la valeur de u tirée de l'équation précédente dans les expressions de Z et de $X + iY$. On a

$$\begin{aligned} u^{\frac{p+\lambda}{q}-1} &= u_1^{\frac{p+\lambda}{q}-1}\left(1 + \theta u_1^{1-\frac{p_1}{q_1}}\right)^{\frac{p+\lambda}{q}-1} \\ &= u_1^{\frac{p+\lambda}{q}-1}\left(1 + \theta' u_1^{1-\frac{p_1}{q_1}}\right) = u_1^{\frac{p+\lambda}{q}-1} + \theta' u_1^{\frac{\lambda}{q}}, \end{aligned}$$

θ' étant, comme θ, une fonction qui s'annule pour $u_1 = 0$. On voit donc que, dans tous les termes de l'expression (19) de Z contenant u, on pourra remplacer u par u_1, en négligeant seulement des quantités qui s'annulent pour $u_1 = 0$ et peuvent être supprimées. On aura ainsi la valeur approchée

$$Z = \int u_1 [\mathfrak{F}_1(u_1) + \mathfrak{F}(u_1)]\, du_1,$$

et un raisonnement analogue donnera de même

$$X + iY = -\int u_1^2 [\mathfrak{F}_1(u_1) + \mathfrak{F}(u_1)]\, du_1.$$

Pour que Z reste finie, il faudra que tous les termes de degré négatif en u_1 se détruisent mutuellement. Si donc on pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(u) &= \Phi(u) + \Psi(u), \\ \mathfrak{F}_1(u_1) &= \Phi_1(u_1) + \Psi_1(u_1), \end{aligned}$$

Φ et Φ_1 contenant tous les termes de degré inférieur à -2, il faudra que l'on ait

$$\Phi_1(u) = -\Phi(u).$$

Telle est la condition cherchée. On reconnaîtra aisément qu'elle est suffisante et que la somme $X + iY$ demeure aussi finie. En réunissant les résultats précédents, on obtient la proposition suivante :

Pour que les points à l'infini des deux courbes (Γ), (Γ_1) *donnent des points de la surface situés à distance finie, il faut et il suffit que les termes de degré inférieur à* -2 *dans les*

fonctions $\mathfrak{F}(u)$, $\mathfrak{F}_1(u)$ soient deux à deux égaux et de signes contraires. Si cette condition est remplie, les points à distance finie qui proviennent des deux branches infinies considérées de (Γ), (Γ_1) *seront distribués sur une droite passant par le point du cercle de l'infini qui est commun à ces deux branches.*

Pour terminer l'étude de cette question, il faudrait rechercher l'ordre de multiplicité des différentes droites de la surface situées soit à l'infini, soit à distance finie, qui proviennent des branches infinies de (Γ) et de (Γ_1). Mais il suffira, pour obtenir ces ordres de multiplicité, d'appliquer les méthodes connues.

244. Il nous reste à dire quelques mots des points multiples et des lignes multiples des surfaces minima.

La surface minima la plus générale, ayant été définie par M. Lie comme lieu géométrique du milieu d'un segment dont les extrémités décrivent les courbes (Γ), (Γ_1), a, généralement, une ligne double, lieu des points qui sont les milieux de deux segments, et des points triples, situés sur cette ligne double, qui sont les milieux de trois segments différents. Sans nous arrêter à l'étude des singularités de ce genre, qui sont en quelque sorte normales, nous dirons quelques mots des surfaces minima qui admettent des points coniques.

Pour que la surface minima ait un point conique O, il faut et il suffit que ce point O soit le milieu d'une infinité de segments, c'est-à-dire que les deux courbes (Γ), (Γ_1) soient symétriques l'une de l'autre par rapport au point O. Cette proposition montre immédiatement comment on engendrera les surfaces minima à point conique. Il suffira de prendre pour la courbe (Γ_1) la symétrique de (Γ) par rapport à un point déterminé. Un raisonnement géométrique très simple permet d'ailleurs de reconnaître que le cône des tangentes au point multiple est exclusivement formé des droites qui vont rencontrer le cercle de l'infini (¹).

(¹) *Voir* au sujet des points coniques, l'article déjà cité de M. Geiser (*Mathematische Annalen*, t. III). Il peut arriver exceptionnellement, si la courbe (Γ) a des points doubles, que le point conique soit sur la ligne double de la surface; alors, au cône indiqué dans le texte viennent s'ajouter un ou plusieurs plans tangents.

La théorie des surfaces minima à point conique se rattache immédiatement à celle des surfaces doubles. Nous avons vu au n° 210 comment on passe d'une surface minima à son adjointe. Les résultats analytiques déjà signalés peuvent s'interpréter comme il suit :

Étant donnée une surface minima, lieu des milieux des segments dont les extrémités s'appuient sur les deux courbes (Γ), (Γ_1), *soient* (Γ'), (Γ'_1) *les homothétiques de* (Γ), (Γ_1) *respectivement, prises par rapport au même pôle* O, *avec des rapports d'homothétie respectivement égaux à* $+i$ *et à* $-i$. *La surface adjointe est le lieu des milieux des segments dont les extrémités décrivent les courbes* (Γ'), (Γ'_1).

Par suite, si les deux courbes (Γ), (Γ_1) sont symétriques l'une de l'autre par rapport au point O, les courbes (Γ'), (Γ'_1) seront identiques et *vice versa*. On est ainsi conduit au théorème suivant :

Pour obtenir toutes les surfaces à point conique, il suffira de prendre les adjointes des surfaces doubles.

On voit ainsi qu'il y a des surfaces réelles à point conique et l'on sait comment on les obtiendra. Le lecteur déduira facilement de ce qui précède la construction suivante :

Pour obtenir l'adjointe de la surface double lieu des milieux des cordes d'une courbe minima (D), *on mènera par le point fixe* O *des parallèles à ces cordes, d'une longueur égale à la longueur de la corde multipliée par* i. *Les extrémités de ces parallèles décriront la surface cherchée, qui aura le point* O *pour point conique.*

CHAPITRE VIII.

LES FORMULES DE M. SCHWARZ.

Détermination de la surface minima tangente à une développable donnée suivant une courbe donnée. — Application à ce problème des résultats généraux que la théorie des équations aux dérivées partielles doit à Cauchy. — Formules de M. Schwarz. — Leur démonstration par M. Lie. — Surfaces minima passant par une droite réelle; la droite est toujours un axe de symétrie de la surface. — Surface minima réglée, détermination nouvelle de cette surface. — Surface minima passant par une courbe plane. — Cas où cette courbe doit être une ligne de courbure ou une ligne géodésique. — Théorème de MM. Henneberg et Lie. — Surface minima admettant une conique pour ligne géodésique.

---

245. Dans les Chapitres précédents, nous avons développé les propriétés les plus simples des surfaces minima. Il nous reste à indiquer comment on peut déterminer une surface minima satisfaisant à des conditions données. Nous examinerons en premier lieu le problème suivant : *Déterminer la surface minima passant par un contour quelconque donné et admettant en chaque point de ce contour un plan tangent donné.*

Nous ferons connaître d'abord ce que nous apprennent, sur la solution de ce problème, les propositions générales relatives à l'intégration par les séries des équations aux dérivées partielles. Ces propositions, que l'on doit à Cauchy (1), peuvent être appliquées à l'équation aux dérivées partielles

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

qui caractérise les surfaces minima. Elles permettent de dé-

---

(1) Les recherches de Cauchy sur ce sujet sont exposées dans différentes Notes insérées en 1842 aux tomes XIV et XV des *Comptes rendus*. On pourra consulter aussi un travail beaucoup plus récent, publié en 1875 par Mme de Kowalewski sous le titre : *Theorie der partiellen Differentialgleichungen* (*Journal de Crelle*, t. LXXX, p. 1).

montrer qu'il existe, en général, une de ces surfaces, et une seule, passant par une courbe donnée et admettant, en chaque point de cette courbe, un plan tangent donné qui passera nécessairement par la tangente à la courbe; ce problème n'est impossible ou indéterminé que dans le cas où la courbe est une caractéristique de l'équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire une courbe minima. Mais la solution que l'on obtient ainsi, en suivant les méthodes de Cauchy, exige que les coordonnées d'un point de la courbe, ainsi que les valeurs de p et de q en ce point, puissent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances d'un paramètre et puissent, par conséquent, être déterminées aussi bien pour les valeurs imaginaires que pour les valeurs réelles de ce paramètre. Elle cesserait d'être applicable si le contour se composait de portions de différentes courbes analytiques, ou si la loi de variation des plans tangents s'exprimait par des fonctions différentes en différentes parties de la courbe. Remarquons enfin que l'existence seule de la solution est démontrée, puisqu'on ne connaît pas la loi des séries au moyen desquelles l'intégrale est obtenue.

Il est facile de prévoir que, lorsqu'on aura obtenu, par un moyen quelconque, l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles, la solution du problème posé par Cauchy deviendra relativement facile, puisqu'elle exigera seulement la détermination des deux fonctions arbitraires d'une seule variable contenues dans l'intégrale générale.

Comme nous l'avons déjà indiqué, le problème qui consiste à déterminer la surface minima passant par un contour donné et y admettant en chaque point un plan tangent donné a été résolu pour la première fois par Björling et M. O. Bonnet. Les méthodes suivies par ces deux géomètres exigent seulement l'emploi des quadratures. Nous allons faire connaître ici celle que l'on doit à M. Schwarz (1) et qui repose sur l'emploi des formules démontrées au n° **212**.

246. Nous avons vu que, si x, y, z désignent les coordonnées

(1) *Miscellen*, etc., § V, p. 291.

d'un point quelconque d'une surface minima et X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale en ce point, les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point correspondant de la surface adjointe seront déterminées par les formules

$$(1) \quad dx_0 = \mathrm{Y}\,dz - \mathrm{Z}\,dy, \qquad dy_0 = \mathrm{Z}\,dx - \mathrm{X}\,dz, \qquad dz_0 = \mathrm{X}\,dy - \mathrm{Y}\,dx,$$

où les seconds membres sont tous des différentielles exactes. Par suite, si l'on se reporte aux expressions (1), (4) [p. 322 et 323] de x, y, z; x_0, y_0, z_0, on voit que l'on aura

$$(2) \quad \begin{cases} x - ix_0 = x + i\int(\mathrm{Z}\,dy - \mathrm{Y}\,dz) = 2\mathrm{A}(t), \\ y - iy_0 = y + i\int(\mathrm{X}\,dz - \mathrm{Z}\,dx) = 2\mathrm{B}(t), \\ z - iz_0 = z + i\int(\mathrm{Y}\,dx - \mathrm{X}\,dy) = 2\mathrm{C}(t), \end{cases}$$

et de même

$$(3) \quad \begin{cases} x + ix_0 = x - i\int(\mathrm{Z}\,dy - \mathrm{Y}\,dz) = 2\mathrm{A}_1(\tau), \\ y + iy_0 = y - i\int(\mathrm{X}\,dz - \mathrm{Z}\,dx) = 2\mathrm{B}_1(\tau), \\ z + iz_0 = z - i\int(\mathrm{Y}\,dx - \mathrm{X}\,dy) = 2\mathrm{C}_1(\tau). \end{cases}$$

Soit (L) le contour donné; quand on se déplace sur ce contour, x, y, z; X, Y, Z deviennent des fonctions d'une certaine variable λ et les formules précédentes, où les intégrales de différentielles totales sont remplacées par des intégrales à une seule différentielle $d\lambda$, donnent les fonctions d'une seule variable A, B, C; A_1, B_1, C_1, exprimées au moyen de λ. Soient $\mathcal{A}(\lambda)$, $\mathcal{B}(\lambda)$, $\mathcal{C}(\lambda)$; $\mathcal{A}_1(\lambda)$, $\mathcal{B}_1(\lambda)$, $\mathcal{C}_1(\lambda)$ les expressions ainsi obtenues. Si le contour (L) est réel et si les valeurs de x, y, z; X, Y, Z sont fournies par des relations numériques ou des lois physiques qui ne permettent pas de déterminer ces variables pour des valeurs imaginaires de λ, les fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ seront incomplètement connues et les formules relatives à la surface

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \mathcal{A}(\lambda) + \mathcal{A}_1(\lambda_1), \\ y' = \mathcal{B}(\lambda) + \mathcal{B}_1(\lambda_1), \\ z' = \mathcal{C}(\lambda) + \mathcal{C}_1(\lambda_1), \end{cases}$$

permettront de déterminer seulement les points qui correspondent à des valeurs réelles de λ et de λ_1. Mais, si le contour (L) est une

courbe analytique, réelle ou imaginaire, et si les fonctions X, Y, Z, qui doivent déjà satisfaire aux deux équations

$$(5)\qquad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \\ X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \end{cases}$$

sont aussi des fonctions analytiques de λ, c'est-à-dire si x, y, z; X, Y, Z ont une signification déterminée aussi bien pour les valeurs imaginaires que pour les valeurs réelles de λ, il en sera de même évidemment des fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ qui devront être regardées comme complètement connues et fourniront la détermination complète des deux courbes minima dont la translation engendre la surface. En remplaçant ces fonctions par leurs valeurs dans les formules précédentes, on aura pour les coordonnées x', y', z' d'un point quelconque de la surface les valeurs suivantes

$$(6)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (Y\,dz - Z\,dy), \\ y' = \dfrac{y_1 + y_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (Z\,dx - X\,dz), \\ z' = \dfrac{z_1 + z_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (X\,dy - Y\,dx), \end{cases}$$

x_1, y_1, z_1 désignant les valeurs de x, y, z pour $\lambda = \lambda_1$ et x_2, y_2, z_2 les valeurs des mêmes variables pour $\lambda = \lambda_2$. On pourra donner à λ_1 et à λ_2 des valeurs imaginaires quelconques; en sorte que les points obtenus dépendront, comme cela doit être, de quatre paramètres réels.

Si le contour (L) est réel et si l'on désigne par λ_0 la valeur de λ correspondante à un point réel déterminé du contour, on pourra prendre

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} (Z\,dy - Y\,dz), \\ \mathcal{B}(\lambda) = \dfrac{y}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} (X\,dz - Z\,dx), \\ \mathcal{C}(\lambda) = \dfrac{z}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda} (Y\,dx - X\,dy), \end{cases}$$

et la partie réelle de la surface sera définie par les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} x' = \mathcal{R}(2\mathcal{A}) = \mathcal{R}\left[x + i\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\text{Z}\,dy - \text{Y}\,dz)\right], \\ y' = \mathcal{R}(2\mathcal{B}) = \mathcal{R}\left[y + i\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\text{X}\,dz - \text{Z}\,dx)\right], \\ z' = \mathcal{R}(2\mathcal{C}) = \mathcal{R}\left[z + i\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\text{Y}\,dx - \text{X}\,dy)\right], \end{cases}$$

où l'on devra donner à λ une valeur imaginaire quelconque.

Il résulte évidemment de la méthode précédente que la surface définie par les équations (6) ou (8) est la seule qui puisse satisfaire à toutes les conditions posées et il reste seulement à démontrer qu'elle satisfait effectivement à ces conditions. Or, si l'on remarque que, d'après leur définition même, les fonctions $\mathcal{A}(\lambda)$, ..., $\mathcal{A}_1(\lambda)$, ... vérifient les relations

$$d\mathcal{A}^2 + d\mathcal{B}^2 + d\mathcal{C}^2 = 0, \qquad \text{X}\,d\mathcal{A} + \text{Y}\,d\mathcal{B} + \text{Z}\,d\mathcal{C} = 0,$$
$$d\mathcal{A}_1^2 + d\mathcal{B}_1^2 + d\mathcal{C}_1^2 = 0, \qquad \text{X}\,d\mathcal{A}_1 + \text{Y}\,d\mathcal{B}_1 + \text{Z}\,d\mathcal{C}_1 = 0,$$

on reconnaîtra aisément : 1° que la surface obtenue est une surface minima ; 2° qu'elle passe par le contour (L) et y admet en chaque point le plan tangent donné ; elle fournit donc bien la solution unique du problème proposé.

En résumé, la méthode de M. Schwarz repose sur les deux propositions suivantes :

Une surface minima est pleinement déterminée quand on donne une courbe analytique tracée sur cette surface et la courbe correspondante tracée sur la surface adjointe.

Lorsqu'on connaît sur une surface minima une courbe (L) *et les plans tangents en chaque point de cette courbe, la courbe correspondante de la surface adjointe peut être déterminée par de simples quadratures.*

247. Dans son Mémoire sur les surfaces minima ([1]), M. Lie a donné pour les formules de M. Schwarz une démonstration nouvelle

---

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XV, p. 467.

que nous allons faire connaître, parce qu'elle peut être généralisée et appliquée à d'autres questions analogues.

Reprenons les équations d'une surface minima sous la forme générale

$$x' = A(t) + A_1(\tau), \quad y' = B(t) + B_1(\tau), \quad z' = C(t) + C_1(\tau),$$

où les fonctions A, B, C; A_1, B_1, C_1 satisfont aux relations

$$(9) \qquad dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$

$$(10) \qquad dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0.$$

Pour que la surface contienne la courbe donnée (L), il faudra que, x, y, z désignant les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe qui sont des fonctions connues d'un paramètre λ, on puisse déterminer pour t et τ des fonctions de λ satisfaisant aux trois équations

$$(11) \qquad x = A + A_1, \quad y = B + B_1, \quad z = C + C_1.$$

D'autre part, si X, Y, Z désignent les cósinus directeurs de la normale à la surface au point considéré (x, y, z) de la courbe (L), il faudra exprimer que le plan tangent contient les tangentes aux deux courbes minima de la surface qui passent par ce point, ce qui donnera les deux équations

$$(12) \qquad X\,dA + Y\,dB + Z\,dC = 0,$$

$$(13) \qquad X\,dA_1 + Y\,dB_1 + Z\,dC_1 = 0,$$

qui, jointes aux précédentes, expriment toutes les conditions du problème. Différentions les équations (11) en supposant que l'on se déplace sur la courbe (L); on aura

$$(14) \qquad \begin{cases} dx = dA + dA_1, \\ dy = dB + dB_1, \\ dz = dC + dC_1. \end{cases}$$

En vertu de ces relations et de l'équation évidente

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

qui exprime que le plan tangent contient la tangente à la courbe (L), et qui doit être vérifiée par les valeurs données de X, Y, Z, les deux équations (12) et (13) se ramèneront l'une à l'autre, et

il restera seulement six équations distinctes (9), (10), (12) et (14) qui permettront en général de déterminer les différentielles $dA, \ldots, dA_1, \ldots$.

Déduisons en effet des équations (14) les valeurs de dA_1, dB_1, dC_1 et portons-les dans la relation (10), nous aurons

$$dx\,dA + dy\,dB + dz\,dC = \frac{ds^2}{2}, \tag{15}$$

s désignant l'arc de (L). Cette équation, jointe aux deux relations (9) et (12), dont l'une est du second degré, va nous donner les valeurs de dA, dB, dC.

A cet effet, prenons comme inconnue auxiliaire (¹) le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ dA & dB & dC \end{vmatrix};$$

si on l'élève au carré, en effectuant la multiplication des lignes entre elles et tenant compte des relations précédentes, on trouvera

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ds^2 & \frac{ds^2}{2} \\ 0 & \frac{ds^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{ds^4}{4}.$$

On a donc

$$\left\{\begin{aligned} \Delta &= (Y\,dz - Z\,dy)\,dA \\ &\quad + (Z\,dx - X\,dz)\,dB + (X\,dy - Y\,dx)\,dC = \pm\frac{i\,ds^2}{2} \end{aligned}\right. \tag{16}$$

et l'on est ainsi ramené au système des trois équations (12), (15) et (16) qui sont toutes du premier degré. Le déterminant de ces équations étant égal à ds^2, elles pourront toujours être résolues tant que le contour (L), réel ou imaginaire, ne sera pas

---

(¹) Toutes les fois que l'on doit résoudre un système d'équations algébriques dont la résolution peut se ramener à celle d'une équation du second degré à une inconnue, il y a avantage à prendre comme inconnue auxiliaire le déterminant fonctionnel des équations par rapport aux inconnues; car ce déterminant, s'annulant dans le cas où les deux systèmes de solutions se réduisent à un seul, ne peut qu'être égal à la valeur du radical qui doit figurer dans les formules définitives et, par conséquent, son carré se calculera rationnellement.

une courbe minima. On obtient ainsi par un calcul facile les valeurs suivantes de dA, dB, dC :

$$(17)\quad \begin{cases} dA = \dfrac{dx}{2} \pm \dfrac{i}{2}(Y\,dz - Z\,dy), \\ dB = \dfrac{dy}{2} \pm \dfrac{i}{2}(Z\,dx - X\,dz), \\ dC = \dfrac{dz}{2} \pm \dfrac{i}{2}(X\,dy - Y\,dx); \end{cases}$$

d'où l'on déduit, à l'aide des formules (14),

$$(18)\quad \begin{cases} dA_1 = \dfrac{dx}{2} \mp \dfrac{i}{2}(Y\,dz - Z\,dy), \\ dB_1 = \dfrac{dy}{2} \mp \dfrac{i}{2}(Z\,dx - X\,dz), \\ dC_1 = \dfrac{dz}{2} \mp \dfrac{i}{2}(X\,dy - Y\,dx), \end{cases}$$

les signes se correspondant dans les deux systèmes. Prenons, par exemple, les signes inférieurs et supposons effectuées les quadratures qui donnent les expressions de A, B, C; A_1, B_1, C_1 en fonction de λ. On peut toujours déterminer les constantes qui entrent dans ces quadratures de manière à satisfaire aux équations (11), et l'on retrouve ainsi les formules de M. Schwarz.

248. La méthode précédente peut être généralisée; elle s'appliquerait, par exemple, aux surfaces engendrées par la translation de deux courbes dont l'une satisferait à l'équation différentielle

$$f\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

et l'autre à une équation de même forme

$$\varphi\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

Elle offre surtout l'avantage de bien mettre en évidence les cas d'exception; ils correspondent, nous allons le voir, à ceux qui sont indiqués par les théories générales de Cauchy.

Nos raisonnements supposent en effet que les trois équations (12), (15) et (16) déterminent dA, dB, dC, ce qui n'aura pas lieu

si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si la courbe (L) est une courbe minima. Dans ce cas particulier, la méthode tombe en défaut, mais les résultats acquis nous permettent une discussion directe et élémentaire. Il faut, pour que le problème soit possible, que la développable formée par les plans tangents en tous les points de (L) soit un cône ayant son sommet sur le cercle de l'infini (n° 233). Si cette condition n'est pas remplie, le problème sera impossible; si elle l'est, le problème sera indéterminé, car on connaîtra l'une des courbes minima dont la translation peut engendrer la surface : ce sera ici la courbe (L); mais la seconde courbe minima sera assujettie à l'unique condition de couper la courbe (L), d'admettre au point commun une tangente donnée et pourra, d'ailleurs, être tracée arbitrairement. La solution du problème contiendra donc encore une fonction arbitraire, comme le montrerait aussi la discussion des équations (9), (10), (11) et (12), dans ce cas spécial.

Les raisonnements supposent aussi que X, Y, Z sont les cosinus directeurs de la normale en un point de la courbe (L) et satisfont à l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Si la développable formée par les plans tangents en tous les points de la courbe est circonscrite au cercle de l'infini, les formules n'ont aucun sens. Mais on obtient encore une solution du problème posé, fournie par la développable elle-même qui doit être considérée (note du n° 187) comme une véritable surface minima. Cette solution est la seule que l'on puisse obtenir dans le cas où (L) n'est pas une courbe minima; mais, si l'on a à la fois

$$ds^2 = 0, \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

l'indétermination reparaît et l'on obtient encore une infinité de surfaces minima ([1]). Cette discussion ne présente aucune diffi-

([1]) L'interprétation géométrique et la discussion du dernier cas que nous venons de signaler conduisent à une propriété générale des surfaces minima que nous nous contenterons d'énoncer.

Étant donnée une surface minima quelconque, lieu des milieux des droites dont les extrémités s'appuient sur les deux courbes minima (Γ), (Γ_1), *la courbe de contact* (C) *de la développable circonscrite à cette surface et au*

culté, mais elle offre de l'intérêt au point de vue de la théorie générale des équations aux dérivées partielles.

249. Les formules de M. Schwarz conduisent à un grand nombre de propositions intéressantes que nous allons faire connaître successivement.

Cherchons d'abord les surfaces minima contenant une droite réelle donnée et admettant aux différents points de cette droite des plans tangents donnés. Si l'on prend la droite pour axe des z, les formules (6) deviendront ici

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{i}{2}\int_0^{z_2} \mathrm{Y}\,dz - \frac{i}{2}\int_0^{z_1} \mathrm{Y}\,dz,\\ y' &= -\frac{i}{2}\int_0^{z_2} \mathrm{X}\,dz + \frac{i}{2}\int_0^{z_1} \mathrm{X}\,dz,\\ z' &= \frac{z_1+z_2}{2}, \end{aligned}\right.$$

X et Y satisfaisant à la relation

$$(20)\qquad \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=1.$$

On voit immédiatement que, si l'on échange z_1 et z_2, z' ne change pas, x' et y' changent de signe sans changer de valeur. Donc :

Toute droite réelle tracée sur une surface minima est nécessairement un axe de symétrie de cette surface.

Cette proposition élégante, due à M. Schwarz, conduit à une

---

cercle de l'infini est aussi l'arête de rebroussement de cette développable; on l'obtient en prenant le milieu de tous les segments qui réunissent les points M, M_1 *des courbes* (Γ), (Γ_1) *où les tangentes à ces courbes sont parallèles. Tous les points de* (C) *sont des ombilics; cette ligne est une arête de rebroussement de la surface minima, elle satisfait à la définition des lignes asymptotiques et aussi à celle des lignes de courbure.*

Les deux courbes minima dont la translation engendre la surface ne cessent pas, dans leur mouvement, d'être tangentes à la courbe (C), *en sorte que l'on pourrait définir la surface minima comme engendrée par la translation d'une courbe minima* (K) *qui, dans son mouvement, est assujettie à demeurer tangente à une autre courbe minima* (C).

démonstration très simple du théorème de M. Catalan : *La seule surface minima réelle réglée est la surface de vis à filet carré.*

Considérons en effet, si elle existe, la surface minima engendrée par le mouvement d'une droite réelle et soient (d_1), (d_2) deux positions de cette droite. La droite (d_3), symétrique de (d_1) par rapport à (d_2), appartient encore, d'après la proposition précédente, à la surface. En prenant de même la symétrique de (d_2) par rapport à (d_3), et répétant indéfiniment cette opération, on obtiendra une série de droites

$$(d_1),\ (d_2),\ (d_3),\ (d_4),\ \ldots,$$

qui seront toutes sur la surface et qui appartiennent évidemment à tout hélicoïde gauche à plan directeur qui contient les deux premières (d) et (d_1). Si nous considérons, en particulier, le plus simple de ces hélicoïdes, celui pour lequel il faut faire moins d'un demi-tour sur la surface pour passer de (d_1) à (d_2), on voit qu'il contiendra un nombre illimité de droites équidistantes de la surface minima. Si les deux droites (d_1) et (d_2) se rapprochent sur la surface, les droites communes à l'hélicoïde et à la surface se rapprochent indéfiniment : la surface doit donc coïncider avec la position limite de l'hélicoïde, ce qui démontre le théorème de M. Catalan.

Nous allons exposer encore la démonstration que M. Schwarz a donnée du même théorème, parce qu'elle repose sur une idée ingénieuse et féconde. Lorsqu'une surface réglée contient une droite, les plans tangents en tous les points de cette droite ne sauraient être choisis arbitrairement et sont assujettis à la loi découverte par M. Chasles. Si l'on prend la droite comme axe des z et si l'on choisit convenablement les autres axes coordonnés, les plans tangents de la surface doivent être les mêmes que ceux du paraboloïde défini par l'équation

$$z = \alpha \frac{y}{x},$$

où α désigne une constante. De là résultent, pour les cosinus directeurs de la normale en chaque point, les déterminations

$$X = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}}, \qquad Y = \frac{-\alpha}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}},$$

et, si l'on porte ces valeurs dans les formules (19), on obtiendra la surface cherchée.

En faisant, pour la commodité des calculs,

$$z = \alpha i \sin t,$$

ce qui donne

$$X = i \tang t, \qquad Y = \frac{-1}{\cos t},$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1), \\ y' &= \frac{\alpha i}{2}(\cos t_1 - \cos t_2), \\ z' &= \frac{\alpha i}{2}(\sin t_1 + \sin t_2) \end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$x' = \alpha \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y'}{z'}\right).$$

Cette équation définit bien la surface de vis à filet carré.

250. Les formules (19) ne contiennent en définitive que deux quadratures distinctes

$$y = \frac{1}{2}\int X\,dz, \qquad x = -\frac{1}{2}\int Y\,dz,$$

et l'on a

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dz^2}{4};$$

$\frac{z}{2}$ sera donc l'arc de la courbe décrite par un point dont les coordonnées seraient x et y. Cela nous conduit à la proposition suivante. Prenons, dans le plan des xy, une courbe quelconque (γ). La surface minima la plus générale passant par l'axe des z sera déterminée par les formules

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= i(x_1 - x_2), \\ y' &= i(y_1 - y_2), \\ z' &= s_1 + s_2, \end{aligned}\right.$$

x_1, y_1; x_2, y_2 désignant les coordonnées de deux points différents de la courbe, s_1 et s_2 étant les arcs de cette courbe comptés à partir d'une origine fixe et terminés en ces deux points. L'interprétation géométrique des formules est d'ailleurs évidente. *Soient* M *et* N

les deux points de la courbe; par l'origine des cordonnées on mènera une droite parallèle à MN *et égale à* iMN, *on élèvera à l'extrémité de cette droite une perpendiculaire égale à la somme des arcs de la courbe terminés en* M *et* N; *le sommet de cette perpendiculaire décrira la surface minima.*

On peut donner encore l'interprétation suivante : Les deux courbes minima définies par les équations

$$(22) \qquad x' = ix, \quad y' = iy, \quad z' = s,$$

$$(23) \qquad x' = -ix, \quad y' = -iy, \quad z' = s$$

sont celles dont la translation peut engendrer la surface et elles sont placées symétriquement par rapport à l'axe des z.

Pour que la surface soit algébrique, il faudra que les deux courbes précédentes soient algébriques, c'est-à-dire que y et x soient des fonctions algébriques de s. En d'autres termes, la courbe (γ) devra être la développée d'une courbe algébrique, d'ailleurs quelconque.

251. Une autre application intéressante des formules de M. Schwarz peut être faite au cas où la courbe (L) par laquelle doit passer la surface est plane. Supposons, pour plus de netteté, que le plan de cette courbe soit réel et choisissons-le pour plan des xy; les formules générales (6) nous donneront ici

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{i}{2}\int_{x_2}^{x_1} Z\,dy, \\ y' &= \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{i}{2}\int_{x_2}^{x_1} Z\,dx, \\ z' &= \frac{i}{2}\int_{x_2}^{x_1} (Y\,dx - X\,dy). \end{aligned} \right.$$

Introduisons l'angle β que fait, en un point de (L), le plan tangent à la surface avec le plan des xy, on aura

$$(25) \qquad X = -\frac{dy}{ds}\sin\beta, \qquad Y = \frac{dx}{ds}\sin\beta \qquad Z = \cos\beta,$$

s étant l'arc de la courbe, et les formules (24) prendront la forme

$$(26)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \cos\beta\, dy, \\ y' = \dfrac{y_1 + y_2}{2} - \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \cos\beta\, dx, \\ z' = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{x_2}^{x_1} \sin\beta\, ds. \end{cases}$$

Si l'on veut que la ligne (L) soit une ligne de courbure de la surface, les normales en tous les points de (L) devront envelopper une des développées de la courbe et l'angle β devra être constant. On aura alors

$$(27)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x_1 + i y_1 \cos\beta}{2} + \dfrac{x_2 - i y_2 \cos\beta}{2}, \\ y' = \dfrac{y_1 - i x_1 \cos\beta}{2} + \dfrac{y_2 + i x_2 \cos\beta}{2}, \\ z' = \dfrac{i(s_1 - s_2)\sin\beta}{2}. \end{cases}$$

Les deux courbes minima dont la translation engendre la surface seront définies par les équations

$$(28)\qquad x' = \frac{x_1 \pm i y_1 \cos\beta}{2}, \qquad y' = \frac{y_1 \mp i x_1 \cos\beta}{2}, \qquad z' = \pm \frac{i s_1 \sin\beta}{2}.$$

Pour qu'elles soient algébriques, il faudra encore que (L) soit la développée d'une courbe algébrique; on a donc le théorème suivant, dû à M. Lie :

Pour que la surface minima admettant une ligne de courbure plane soit algébrique, il faut et il suffit que cette ligne plane soit la développée d'une courbe algébrique.

Cette proposition générale explique pourquoi les lignes de courbure planes de la surface d'Enneper sont des courbes rectifiables (n° 207).

Si l'on suppose $\beta = \frac{\pi}{2}$, la courbe (L) devient une ligne géodésique de la surface. On retrouve donc le théorème suivant :

Pour que la surface minima admettant comme ligne géodé-

sique une courbe plane soit algébrique, il faut et il suffit que cette ligne soit la développée d'une courbe algébrique,

qui est dû à M. Henneberg et qui a été le point de départ des travaux de M. Lie sur cette partie de la théorie.

Si, dans les formules (27), on fait $\beta = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$(29) \qquad x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y' = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z' = \frac{s_1 - s_2}{2};$$

on est ainsi conduit à la construction suivante de la surface minima :

Soit MN *une corde de la courbe* (L). *Élevons en son milieu une perpendiculaire égale au produit de i par la demi-différence des arcs de la courbe terminés en* M *et en* N. *Le sommet de cette perpendiculaire décrit la surface minima qui admet* (L) *pour ligne géodésique.*

Si l'on échange les points M et N, le signe de la perpendiculaire est changé; on a donc, dans tous les cas, ce théorème :

Si une surface minima admet une courbe plane comme ligne géodésique, le plan de cette courbe est nécessairement un plan de symétrie de la surface.

Ces propriétés de symétrie, que nous avons déjà rencontrées à propos de la ligne droite, ont leur véritable origine dans le fait, qui est mis en évidence par les formules de M. Schwarz, mais qui résulte aussi des théorèmes de Cauchy, qu'il existe *une seule* surface minima tangente à une développable donnée en tous les points d'une courbe donnée. Car, soit (M) une surface minima admettant la ligne géodésique plane (L) et coupant, par suite, à angle droit le plan de cette ligne; la surface (M') symétrique de (M) par rapport au plan de (L) admettra, en tous les points de cette courbe, les mêmes plans tangents que M et coïncidera par conséquent avec elle; (M) sera donc nécessairement symétrique par rapport au plan de la courbe (L). Ce raisonnement, que l'on pourrait appliquer au cas de la ligne droite, permet de reconnaître que, si (L) a un centre, ce point sera aussi un centre de la surface,

et que, si cette courbe a un axe, le plan normal au plan de (L) et passant par cet axe sera un nouveau plan de symétrie de la surface.

On peut donner encore la construction suivante de la surface qui admet (L) pour ligne géodésique : Sur le cylindre ayant (L) pour section droite traçons une courbe minima (γ) et prenons la symétrique (γ_1) de cette courbe par rapport au plan de (L). La surface cherchée sera le lieu des milieux des segments dont les extrémités décrivent les courbes (γ), (γ_1).

La surface minima admettant comme ligne géodésique une parabole a été étudiée dans les premiers Mémoires de M. Catalan. Si l'on prend les coordonnées d'un point de la parabole sous la forme

$$(30)\qquad \begin{cases} x = -2p\sin^2\varphi, \\ y = 2pi\sin\varphi, \end{cases}$$

la partie réelle de la surface sera définie par les équations

$$(31)\qquad \begin{cases} x = \Re(-p\sin^2\varphi), \\ y = \Re(2pi\sin\varphi), \\ z = \Re\left[\dfrac{p(2\varphi + \sin 2\varphi)}{2}\right]. \end{cases}$$

Si l'on donne à φ une valeur réelle, on reconnaît que la section de la surface par le plan des xz est une cycloïde. Cette courbe, située dans le plan de symétrie passant par l'axe de la parabole, est aussi une ligne géodésique de la surface.

La surface minima admettant comme ligne géodésique une ellipse ou une hyperbole est nécessairement transcendante; mais elle admet, on le reconnaît aisément, une famille de lignes algébriques. Elle a été considérée par M. Schwarz (¹).

Nous terminerons ici ces applications des formules de M. Schwarz. Comme l'a remarqué M. O. Bonnet, la solution du problème étudié dans ce Chapitre permet de déterminer une surface minima lorsqu'on connaît, soit une de ses lignes géodésiques,

---

(¹) Schwarz, *Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden* (*Journal de Crelle*, t. LXXX, pp. 301-314; 1875).

soit une de ses lignes asymptotiques, soit une ligne de courbure, soit enfin une de ses lignes d'ombre ou une de ses lignes de perspective; car toutes ces conditions font connaître, en même temps qu'une ligne tracée sur la surface, le plan tangent en chaque point de cette ligne.

CHAPITRE IX.

SURFACES MINIMA ALGÉBRIQUES INSCRITES DANS UNE DÉVELOPPABLE ALGÉBRIQUE.

Cas où la développable est un cylindre. — Le problème n'est possible que si la section droite est rectifiable. — Solution analytique du problème proposé. — Première solution géométrique. — Construction générale des surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique. — Théorèmes relatifs à des cas particuliers donnés par M. Lie. — Deuxième solution géométrique. — Génération nouvelle des surfaces minima due à M. Ribaucour. — Le problème se ramène à la détermination d'une surface réglée dont la ligne de striction doit satisfaire à une condition donnée.

---

252. Les résultats que nous avons exposés dans le Chapitre précédent conduisent naturellement à l'examen d'une question dont la solution offrirait un grand intérêt pour la théorie des surfaces minima algébriques :

A. *Déterminer toutes les surfaces minima algébriques contenant une courbe algébrique donnée;*

ou plus généralement

B. *Déterminer toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une surface algébrique donnée.*

Aucun de ces problèmes n'a encore été abordé dans toute sa généralité; mais, dans son second Mémoire inséré au t. XV des *Mathematische Annalen*, M. Lie a soumis à une discussion approfondie le problème B, dans le cas où la surface algébrique donnée est une développable. Il résulte de ses belles recherches que le problème peut être complètement résolu si cette développable est un cône, et aussi dans le cas où, la développable étant quelconque, on connaît déjà une surface minima inscrite dans cette développable. Nous allons reprendre ici l'étude de cette

question, et nous montrerons que l'on peut obtenir la solution complète du problème posé par M. Lie.

253. Commençons par considérer le cas où la développable (Δ) est un cylindre. La proposition suivante, due à M. Henneberg, permet de reconnaître immédiatement que le problème posé n'est pas toujours possible :

Lorsqu'une surface minima est algébrique, la section droite de tout cylindre circonscrit à la surface est la développée d'une courbe algébrique.

Soit en effet (Σ) la surface minima donnée; la surface adjointe (Σ_0) sera aussi algébrique (n° 210), et l'on aura, entre les points correspondants (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) des deux surfaces, les relations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0, \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2, \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les suivantes (n° 212),

$$\begin{aligned} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz &= 0, \\ X\,dx_0 + Y\,dy_0 + Z\,dz_0 &= 0, \end{aligned}$$

exprimant qu'aux points correspondants des deux surfaces les plans tangents sont parallèles.

Considérons sur la première surface la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèle à l'axe des z, à laquelle correspondra la courbe de même définition sur (Σ_0). On aura, en tous les points de cette courbe,

$$Z = 0,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned} X\,dx + Y\,dy &= 0, \\ X\,dx_0 + Y\,dy_0 &= 0, \end{aligned}$$

ou, en éliminant le rapport $\frac{X}{Y}$,

$$(2)\qquad dx\,dy_0 - dy\,dx_0 = 0.$$

Si, entre les équations (1) et (2), l'on élimine successivement

dx_0, dy_0 et dx, dy, on sera conduit aux deux relations

$$(3) \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} = dz_0,$$

$$(4) \qquad \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2} = dz,$$

qu'il serait aisé d'obtenir par la Géométrie et qui démontrent le théorème de M. Henneberg; car la première, par exemple, exprime que l'arc de la section droite du cylindre circonscrit à (Σ) est égal à z_0.

Il résulte évidemment du théorème de M. Henneberg qu'une surface minima inscrite dans un cylindre ne pourra être algébrique que si la section droite de ce cylindre est la développée d'une courbe algébrique. Considérons un cylindre (C) pour lequel cette condition soit remplie et dont la section droite (S) sera placée dans le plan des xy; proposons-nous de déterminer toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans ce cylindre.

Désignons par x, y les coordonnées d'un point quelconque de (S); le problème sera résolu si nous parvenons à déterminer les quantités déjà définies x_0, y_0, z_0, z en fonction de x et de y. La formule (3) nous donne d'abord

$$z_0 = s,$$

s désignant l'arc de la section droite (S); les équations (1) et (2) nous permettent ensuite de déterminer dx_0, dy_0 et nous donnent

$$(5) \qquad dx_0 = -dx\frac{dz}{ds}, \qquad dy_0 = -dy\frac{dz}{ds};$$

z sera donc, au signe près, l'arc de la courbe décrite par le point (x_0, y_0), et l'interprétation géométrique des formules conduit sans difficulté à la construction suivante :

On associe, dans le plan des xy, à la courbe (S) *une courbe* (S_0), *assujettie à l'unique condition d'être la développée d'une courbe algébrique, et l'on établit une correspondance entre les deux courbes par la condition que les tangentes aux points correspondants* M, M_0 *soient parallèles. Si l'on élève en* M *une perpendiculaire au plan de* (S) *égale et de signe contraire à l'arc de* (S_0) *terminé en* M_0, *l'extrémité de cette perpendiculaire décrira sur le cylindre* (C) *la courbe de contact de la*

surface minima algébrique la plus générale (Σ) *inscrite dans ce cylindre. Si l'on élève de même en* M_0 *une perpendiculaire égale à l'arc de* (S) *terminé en* M, *l'extrémité de cette perpendiculaire décrira la courbe de la surface* (Σ_0) *adjointe à* (Σ), *qui correspond à la courbe de contact de* (Σ) *et de* (C).

Nous savons d'ailleurs (n° **246**) comment on peut déduire, sans aucune intégration, des expressions $x, y, z; x_0, y_0, z_0$ les équations qui définissent la surface. Le problème est ainsi complètement résolu.

Si l'on suppose que le cylindre (C) se réduise à une droite, on retrouve comme cas particulier la construction, qui a été donnée au n° **250**, des surfaces minima assujetties à contenir une droite donnée.

251. Passons maintenant à l'étude du problème général et proposons-nous de déterminer toutes les surfaces minima algébriques inscrites dans une développable algébrique donnée (Δ).

Si l'on écrit l'équation du plan sous la forme

$$(u+u_1)X+i(u_1-u)Y+(uu_1-1)Z+\xi=0,$$

on a, pour toute surface minima, en vertu de l'équation (5) [p. 297]

$$\xi=2u_1f(u)+2uf_1(u_1)-(1+uu_1)[f'(u)+f_1'(u_1)]. \tag{6}$$

D'autre part, on définira la développable (Δ) de la manière la plus générale en supposant que, pour les plans tangents de cette développable, u, u_1, ξ soient des fonetions algébriques données d'une variable auxiliaire t; et, pour résoudre le problème, il faudra exprimer que l'équation (6) est vérifiée identiquement quand on y remplace u, u_1, ξ par leurs expressions en fonction de t. Cette équation contient deux fonctions arbitraires $f(u)$, $f_1(u_1)$ avec leurs dérivées $f'(u)$, $f_1'(u_1)$; si l'on se donnait arbitrairement l'une de ces deux fonctions, l'équation de condition à laquelle on est conduit en substituant pour u, u_1, ξ leurs expressions en fonction de t serait une véritable équation différentielle qui n'admettrait pas nécessairement de solution algébrique; pour échapper à cette difficulté, nous introduirons la variable auxiliaire

$$\lambda=f(u)\frac{du_1}{dt}+f_1(u_1)\frac{du}{dt}. \tag{7}$$

Si l'on différentie cette valeur de λ, on aura

$$[f'(u)+f_1'(u_1)]\frac{du}{dt}\frac{du_1}{dt}=\frac{d\lambda}{dt}-f(u)\frac{d^2u_1}{dt^2}-f_1(u_1)\frac{d^2u}{dt^2},$$

et, en substituant la valeur ainsi obtenue de la somme

$$f'(u)+f_1'(u_1)$$

dans l'équation (6), on obtiendra la relation

$$(8)\quad \begin{cases} [\xi-2u_1f(u)-2uf_1(u_1)]\dfrac{du}{dt}\dfrac{du_1}{dt} \\ \quad =(1+uu_1)\left[f(u)\dfrac{d^2u_1}{dt^2}+f_1(u_1)\dfrac{d^2u}{dt^2}-\dfrac{d\lambda}{dt}\right].\end{cases}$$

On peut maintenant déduire des équations (7) et (8) les expressions de $f(u)$, $f_1(u_1)$, ce qui donne les valeurs suivantes

$$(9)\quad \begin{cases} \Theta f(u)=\lambda\left[2u\dfrac{du_1}{dt}\dfrac{du}{dt}+(1+uu_1)\dfrac{d^2u}{dt^2}\right] \\ \qquad -\xi\dfrac{du_1}{dt}\dfrac{du^2}{dt^2}-(1+uu_1)\dfrac{d\lambda}{dt}\dfrac{du}{dt}, \\ \Theta f_1(u_1)=-\lambda\left[2u_1\dfrac{du}{dt}\dfrac{du_1}{dt}+(1+uu_1)\dfrac{d^2u_1}{dt^2}\right] \\ \qquad +\xi\dfrac{du}{dt}\dfrac{du_1^2}{dt^2}+(1+uu_1)\dfrac{d\lambda}{dt}\dfrac{du_1}{dt},\end{cases}$$

Θ désignant le dénominateur commun

$$\Theta=2u\frac{du}{dt}\frac{du_1^2}{dt^2}-2u_1\frac{du_1}{dt}\frac{du^2}{dt^2}+(1+uu_1)\left(\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du_1}{dt}-\frac{d^2u_1}{dt^2}\frac{du}{dt}\right).$$

Prenons pour λ une fonction algébrique quelconque de t. Si, dans la première équation (9), on exprime u_1, t, ξ en fonction de u, on aura $f(u)$; si, dans la seconde, on exprime de même u, t, ξ en fonction de u_1, cette équation donnera $f_1(u_1)$.

Le problème est ainsi complètement résolu; pour que la surface soit réelle, il sera nécessaire et suffisant que la fonction λ le soit, s'il est supposé toutefois que t soit un paramètre dont les valeurs réelles donnent les plans tangents réels de la développable (Δ).

La solution précédente serait illusoire si la fonction Θ était nulle identiquement : supposons que cette circonstance se présente

et que l'on ait

$$\Theta = 2u\frac{du}{dt}\frac{du_1^2}{dt^2} - 2u_1\frac{du_1}{dt}\frac{du^2}{dt^2} + (1+uu_1)\left(\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du_1}{dt} - \frac{du}{dt}\frac{d^2u_1}{dt^2}\right) = 0.$$

Cette relation constitue une équation différentielle dont on obtient aisément l'intégrale générale, qui est

$$Au + Bu_1 + C(uu_1 - 1) = 0,$$

A, B, C désignant des constantes. Cette équation en termes finis exprime que le plan tangent est parallèle à une direction fixe; la développable (Δ) sera donc un cylindre; et, en effet, une étude directe nous a montré que, dans ce cas, le problème n'est pas toujours possible : la surface minima inscrite ne peut être algébrique que si la section droite du cylindre est la développée d'une courbe algébrique.

La méthode que nous avons suivie s'applique du reste à ce cas particulier; si l'on suppose que le cylindre soit parallèle à l'axe des y, il sera défini par les équations

$$u_1 = u, \qquad \xi = \psi(u).$$

Si l'on prend ici $t = u$, on aura

$$\lambda = f(u) + f_1(u),$$

et l'équation à résoudre prend la forme

$$\psi(u) + (1+u^2)\frac{d\lambda}{du} - 2u\lambda = 0.$$

Elle admet pour intégrale la suivante

$$\frac{\lambda}{1+u^2} + \int\frac{\psi(u)\,du}{(1+u^2)^2} = 0;$$

il faudra donc, pour que λ soit algébrique, qu'il en soit de même de la quadrature

$$\int\frac{\psi(u)\,du}{(1+u^2)^2},$$

et l'on retrouve ainsi, par un calcul facile, la condition à la fois nécessaire et suffisante qui résulte du théorème de M. Henneberg.

255. La solution que nous venons d'exposer est purement ana-

lytique; la suivante offre l'avantage de conduire à une construction géométrique simple des surfaces minima algébriques inscrites dans la développable (Δ).

Soit (R) l'arête de rebroussement de cette développable : rapportons les points de l'espace, comme nous l'avons déjà fait (Liv. I, Ch. I), au trièdre mobile (T) formé par la tangente, la normale principale et la binormale à cette courbe. Les projections sur ces trois axes des déplacements infiniment petits d'un point, dont les coordonnées relatives à ces axes sont X, Y, Z, auront pour expressions (n°s 3 et 4)

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &dX + ds - \frac{Y}{\rho}\,ds,\\ &dY + \left(\frac{X}{\rho} + \frac{Z}{\tau}\right)ds,\\ &dZ - \frac{Y}{\tau}\,ds.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, le problème sera résolu si l'on trouve deux courbes algébriques (C), (C_0), l'une (C) tracée sur la développable (Δ), l'autre (C_0) située dans l'espace, satisfaisant aux conditions suivantes : les éléments correspondants des deux courbes seront à la fois égaux et perpendiculaires; de plus, si M et M_0 sont les points correspondants de ces deux courbes, le plan tangent en M à la développable (Δ) devra être parallèle à la tangente en M_0 à (C_0). En effet, si l'on considère la surface minima inscrite à (Δ) suivant la courbe (C), la courbe (C) aura pour conjuguée (C_0) sur la surface adjointe, et, ces deux courbes (C), (C_0) étant algébriques, il en sera de même de la surface minima.

Soient x, o, o les coordonnées de M par rapport au trièdre (T) et x_0, y_0, z_0 celles de M_0. Les projections du déplacement de M seront, d'après les formules rappelées plus haut,

$$(11)\qquad dx + ds,\qquad \frac{x\,ds}{\rho},\qquad 0;$$

celles du déplacement de M_0 seront de même

$$(12)\qquad dx_0 + ds - \frac{y_0}{\rho}\,ds,\quad dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{z_0}{\tau}\right)ds,\quad dz_0 - \frac{y_0}{\tau}\,ds.$$

En exprimant que la tangente en M_0 est parallèle au plan des

xy, on trouve cette première condition

$$(13)\qquad dz_0 - \frac{y_0}{\tau}\,ds = 0.$$

Si l'on écrit ensuite que les deux déplacements sont à la fois égaux et perpendiculaires, on obtient les deux conditions nouvelles

$$(dx + ds)^2 + \frac{x^2\,ds^2}{\rho^2} = \left(dx_0 + ds - \frac{y_0\,ds}{\rho}\right)^2 + \left[dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{z_0}{\tau}\right)ds\right]^2,$$

$$(dx + ds)\left(dx_0 + ds - \frac{y_0\,ds}{\rho}\right) + \frac{x\,ds}{\rho}\left[dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{z_0}{\tau}\right)ds\right] = 0,$$

que l'on ramène facilement aux suivantes

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\pm(dx + ds) = dy_0 + \left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{z_0}{\tau}\right)ds,\\ &\mp\frac{x\,ds}{\rho} = dx_0 + ds - \frac{y_0\,ds}{\rho},\end{aligned}\right.$$

où les signes se correspondent. Il est aisé de voir que les équations (13) et (14) peuvent donner les valeurs de y_0, z_0, x en fonction de x_0; car, si l'on différentie la seconde des équations (14) après l'avoir écrite sous la forme

$$\pm x - y_0 = \mp\rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right),$$

on obtient, en tenant compte de la première, la relation nouvelle

$$(15)\qquad \frac{x_0}{\rho} + \frac{z_0}{\tau} \mp 1 = -\frac{d}{ds}\left[\rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right)\right],$$

qui, jointe à l'équation (13) et à la seconde équation (14), nous donne les valeurs suivantes de y_0, z_0, x :

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &z_0 = \pm\tau - \frac{\tau}{\rho}x_0 - \tau\frac{d}{ds}\left[\rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right)\right],\\ &y_0 = \tau\frac{dz_0}{ds},\\ &x = \pm y_0 \mp \rho\left(\frac{dx_0}{ds} + 1\right).\end{aligned}\right.$$

Ces formules donnent la solution complète du problème proposé. Si la développable (Δ) est algébrique, il suffira de prendre

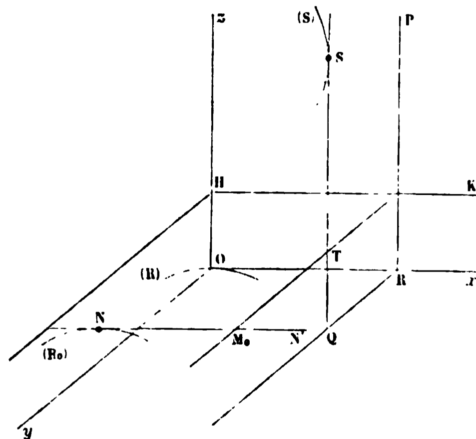
pour x_0 une fonction algébrique du paramètre dont dépendent algébriquement les éléments de la développable; les fonctions z_0, y'_0, x et, par suite, la surface minima correspondante seront également algébriques.

256. Les formules que nous venons d'obtenir s'interprètent géométriquement de la manière suivante.

Construisons (*fig.* 19) le trièdre (T) et soit PRQ le plan défini par l'équation

$$x = x_0.$$

Fig. 19



Quand le trièdre (T) se déplace, ce plan enveloppe une développable (D); si x_0, y', z' désignent les coordonnées d'un de ses points, les projections du déplacement de ce point sur les trois axes seront, conformément aux formules (10),

$$(17) \qquad dx_0 + ds\left(1 - \frac{y'}{\rho}\right), \quad dy' + \left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{z'}{\tau}\right)ds, \quad dz' - \frac{y'}{\tau}ds.$$

Par conséquent, l'équation

$$dx_0 + ds\left(1 - \frac{y'}{\rho}\right) = 0,$$

qui définit les points du plan dont le déplacement est perpendiculaire à Ox, c'est-à-dire parallèle au plan, représentera la généra-

trice de contact du plan avec son enveloppe (D); la droite QS ainsi obtenue est évidemment parallèle à Oz et l'on déterminera son point de conctact S avec l'arête de rebroussement (S) de (D), en écrivant l'équation

$$dy' + \left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{z'}{\tau}\right) ds = 0,$$

par laquelle on exprime que le déplacement de ce point est aussi perpendiculaire à Oy. Les deux formules précédentes nous conduisent, pour les coordonnées du point S, aux expressions

$$(18)\quad \begin{cases} y' = \rho\left(1 + \dfrac{dx_0}{ds}\right), \\ z' = -\dfrac{\tau x_0}{\rho} - \tau \dfrac{dy'}{ds} = -\dfrac{\tau x_0}{\rho} - \tau \dfrac{d}{ds}\left[\rho\left(1 + \dfrac{dx_0}{ds}\right)\right]. \end{cases}$$

La comparaison de ces résultats avec la première des formules (16) nous donne d'abord

$$(19)\qquad z_0 = z' \pm \tau.$$

D'après cela, si l'on porte sur SQ une longueur

$$\mathrm{ST} = \pm \tau,$$

le plan HKT, mené par le point T parallèlement au plan des xy, aura pour équation

$$z = z_0,$$

et, si nous désignons par x'', y'', z_0 les coordonnées d'un quelconque de ses points, les projections du déplacement de ce point seront

$$(20)\qquad dx'' + ds\left(1 - \frac{y''}{\rho}\right),\quad dy'' + \left(\frac{x''}{\rho} + \frac{z_0}{\tau}\right) ds,\quad dz_0 - \frac{y''}{\tau} ds;$$

par suite, l'équation

$$(21)\qquad y'' = \tau \frac{dz_0}{ds} = y_0$$

définira l'arête de contact NN' du plan avec la développable qu'il enveloppe, développable que nous désignerons par (Δ_0); et, si l'on joint à la précédente la relation

$$(22)\qquad \frac{dy''}{ds} + \frac{x''}{\rho} + \frac{z_0}{\tau} = 0,$$

ces deux formules (21), (22) définiront le point de contact N de NN′ avec l'arête de rebroussement de (Δ_0).

Le point M_0 où la droite NN′ coupe le plan PRQ a pour coordonnées x_0, y_0, z_0, il décrit donc la courbe cherchée (C_0), tandis que la droite NN′ engendre la développable (Δ_0). Si l'on remarque enfin que la dernière formule (16) peut se mettre sous la forme

$$x = \pm(y_0 - y') = \pm TM_0,$$

on sera conduit à la construction suivante :

Étant donnée la développable (Δ), *on construit une courbe algébrique* (S) *dont les tangentes soient perpendiculaires aux plans tangents de* (Δ) *et dont les plans osculateurs soient, par suite, perpendiculaires aux génératrices de* (Δ); *sur une droite* SQ *tangente en* S *à* (S), *on porte la longueur*

$$ST = \pm\tau,$$

τ *désignant le rayon de torsion de l'arête de rebroussement* (R) *de* (Δ) *au point* O *où cette courbe* (R) *est touchée par le plan tangent de* (Δ) *perpendiculaire à* SQ. *Le plan mené par le point* T *normalement à* SQ *enveloppe la développable* (Δ_0) *et la touche suivant une droite* NN′, *nécessairement parallèle à la tangente de* (R) *en* O. *La projection* M_0 *de l'un des points* S, T *sur cette génératrice de* (Δ_0) *décrit la courbe* (C_0). *Pour obtenir la courbe* (C), *on portera sur la tangente de* (R) *en* O *une longueur égale à*

$$\pm TM_0.$$

257. De cette construction générale on peut déduire toutes celles qui sont relatives à des cas particuliers et qui ont été données par M. Lie. Supposons d'abord que la développable (Δ) soit un cône, son arête de rebroussement, réduite à un point, devra être considérée comme homothétique à une courbe finie, le rapport d'homothétie étant nul. Il faudra donc supposer dans la construction précédente

$$\tau = 0.$$

Le point T se confondra donc avec le point S et le plan HKT deviendra le plan normal en S à la courbe (S). Par suite, la ligne

NN′ sera l'axe du cercle osculateur et le point M_0 le centre de courbure de (S). On est ainsi conduit à la construction suivante, qui est due à M. Lie (¹) :

Pour obtenir la surface minima algébrique la plus générale inscrite dans un cône algébrique, on construira une courbe algébrique quelconque (S) *dont les plans osculateurs soient perpendiculaires aux génératrices du cône, et l'on portera sur chacune des génératrices du cône, à partir du sommet, une longueur égale au rayon de courbure de* (S) *au point correspondant. L'extrémité de cette longueur décrira sur le cône la courbe* (C) *de contact d'une surface minima algébrique, inscrite dans le cône; la surface adjointe de cette surface minima contiendra le lieu des centres de courbure de* (S).

258. Nous indiquerons une autre application particulière relative au cas où la courbe (S), mentionnée au n° 256, se réduit à un point. S'il en est ainsi, les composantes (17) du déplacement du point S devront être toutes nulles, et l'on aura à ajouter aux équations (18) la suivante

$$dz' - \frac{y'}{\tau} ds = 0,$$

qui nous donne

$$y' = \tau \frac{dz'}{ds}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$y'_0 = \tau \frac{dz_0}{ds},$$

l'expression (28) de x prendra la forme

$$x = \pm \tau \frac{d(z_0 - z')}{ds}$$

ou, en tenant compte de l'équation (19),

$$x = \tau \frac{d\tau}{ds}.$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XV, p. 488.

Cette expression de x donne le curieux théorème suivant :

Étant donnée une courbe algébrique (R), *si l'on porte sur les tangentes à cette courbe, à partir du point de contact, une longueur égale à*

$$\tau \frac{d\tau}{ds},$$

on obtiendra une courbe (C) *suivant laquelle une surface minima algébrique* (M) *sera inscrite à la développable formée par les tangentes de* (R).

Remarquons une fois pour toutes que les propositions données dans ce Chapitre sont applicables aux courbes et aux développables transcendantes. Dans ce cas, au lieu de surfaces minima algébriques, les opérations indiquées nous donneront des surfaces minima que l'on pourra déterminer sans aucune intégration. C'est ainsi que le théorème précédent nous conduit, si la courbe (R) est transcendante, à une surface minima dont on peut écrire les équations sans aucun signe de quadrature.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier directement cette proposition par l'application des formules de M. Schwarz. On trouve ainsi pour déterminer la surface les formules suivantes

$$x_1 = \mathcal{R}\left[x + a\tau\frac{d\tau}{ds} + i\tau\left(b\frac{d\tau}{ds} + c\right)\right],$$
$$y_1 = \mathcal{R}\left[y + a'\tau\frac{d\tau}{ds} + i\tau\left(b'\frac{d\tau}{ds} + c'\right)\right],$$
$$z_1 = \mathcal{R}\left[z + a''\tau\frac{d\tau}{ds} + i\tau\left(b''\frac{d\tau}{ds} + c''\right)\right],$$

a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' désignant respectivement les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale en un point de la courbe considérée. Ces cosinus directeurs satisfont aux formules données par M. Serret [p. 10].

259. La proposition que nous venons d'établir dans le numéro précédent donne une solution particulière du problème général qui fait l'objet de ce Chapitre. On doit à M. Lie une construction élégante qui permet de le résoudre d'une manière complète lorsqu'on en connaît une seule solution particulière, obtenue d'ail-

leurs d une manière quelconque; nous allons montrer comment les résultats précédents conduisent à la proposition de M. Lie.

Reportons-nous aux formules (16) que nous écrirons sous la forme suivante

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} z_0 &= \pm\tau - \frac{d\varepsilon}{d\eta}x_0 - \frac{d}{d\eta}\left(\rho + \frac{dx_0}{d\varepsilon}\right),\\ y_0 &= \frac{dz_0}{d\eta},\\ x &= y_0 - \rho \mp \frac{dx_0}{d\varepsilon},\end{aligned}\right.$$

en introduisant les angles de contingence et de torsion, $d\varepsilon$, $d\eta$; et supposons que l'on ait déterminé la surface minima correspondante à une valeur particulière x'_0 de x_0. Si l'on veut obtenir la solution correspondante à la fonction algébrique la plus générale que nous mettrons sous la forme

$$x'_0 + x''_0,$$

il faudra ajouter aux valeurs trouvées y'_0, z'_0, x' de y_0, z_0, x des termes y''_0, z''_0, x'' que l'on obtiendrait, par suite de la forme linéaire des équations (25), en remplaçant dans ces équations x_0 par x''_0 et supprimant les termes $\pm\tau$, $-\rho$ qui ne contiennent pas x_0, c'est-à-dire en faisant

$$\tau = \rho = 0,$$

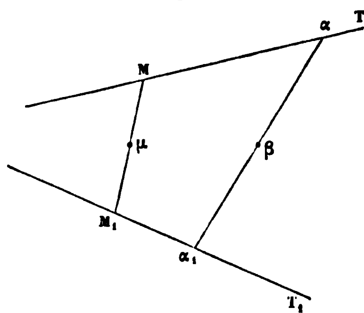
ce qui revient à supposer que la développable (Δ) se réduit à un cône. En particulier, la quantité x'' qu'il faudra ajouter à x' sera la même que si la développable (Δ) se réduisait à un cône; cette remarque, jointe à la construction déjà donnée (n° 257) pour le cas particulier du cône, nous conduit au théorème de M. Lie :

Si l'on a obtenu une surface minima (M) *inscrite dans la développable* (Δ), *on construira la courbe algébrique* (C) *la plus générale dont les tangentes sont perpendiculaires aux plans tangents de* (Δ) *et l'on portera sur chaque génératrice de* (Δ), *à partir du point de contact de cette génératrice avec la surface* (M), *une longueur égale au rayon de courbure de la courbe* (C) *au point correspondant. L'extrémité de cette longueur décrira la courbe de contact de la surface minima algébrique la plus générale inscrite dans la développable* (Δ).

260. Aux deux solutions différentes que nous venons de donner successivement on peut ajouter la suivante, que nous allons développer, parce qu'elle repose sur une génération nouvelle des surfaces minima, obtenue dans un important Mémoire de M. Ribaucour (¹).

Nous avons vu (nº **220**) comment on obtient la surface minima la plus générale au moyen de deux courbes minima (Γ), (Γ_1); si M, M_1 sont deux points appartenant respectivement aux deux courbes, le milieu μ du segment MM_1 (*fig.* 20) décrit la surface minima et

Fig. 20.



le plan tangent en μ est parallèle aux deux droites MT, M_1T_1, tangentes en M et en M_1 respectivement aux deux courbes (Γ), (Γ_1). Soit (P) le plan osculateur en M à (Γ), nous désignerons par (Σ) la développable qu'il enveloppe et dont (Γ) est l'arête de rebroussement; nous désignerons de même par (P_1) le plan osculateur en M_1 à (Γ_1) et par (Σ_1) la développable dont l'arête de rebroussement est (Γ_1). Les deux plans (P), (P_1) se coupent suivant une droite qui touche respectivement les deux développables en α et en α_1; je vais d'abord prouver que cette droite $\alpha\alpha_1$ est perpendiculaire au plan tangent en μ à la surface minima.

Il suffit, pour le reconnaître, de se rappeler la propriété caractéristique des plans tangents au cercle de l'infini : toute droite

(¹) Ribaucour, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, Mémoire couronné par l'Académie de Belgique dans la séance publique du 16 décembre 1880 (*Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique*, in-4°, t. XLIV; 1881).

perpendiculaire à un tel plan lui est aussi parallèle et va passer par le point de contact du plan avec le cercle de l'infini. Il résulte de là que la tangente MT située dans le plan (P) lui sera perpendiculaire et sera, par suite, perpendiculaire à la droite $\alpha\alpha_1$, située dans ce plan. Pour la même raison, $\alpha\alpha_1$ sera perpendiculaire à M_1T_1; elle sera donc perpendiculaire au plan tangent en μ, qui est parallèle à la fois à MT et à M_1T_1.

Ce point étant établi, nous remarquerons de plus que le plan tangent en μ, qui est parallèle aux deux droites MT, M_1T_1, est aussi à des distances égales de ces deux droites; il passera donc nécessairement par le milieu β du segment de droite $\alpha\alpha_1$.

En réunissant tous ces résultats, on obtient évidemment le mode de génération suivant des surfaces minima, qui a été donné par M. Ribaucour :

Si l'on considère deux développables (Σ), (Σ_1), *circonscrites l'une et l'autre au cercle de l'infini, la surface minima la plus générale est l'enveloppe des plans perpendiculaires à toutes les tangentes communes de ces deux développables, ces plans étant menés à égale distance des deux points de contact de ces tangentes communes.*

Cette définition est moins simple et moins complète que celle de M. Lie, qui détermine à la fois le point et le plan tangent de la surface minima; mais elle offre l'avantage de ne faire intervenir que les plans tangents, et elle associe à la surface minima, lieu du point μ, la surface lieu du point β, à laquelle M. Ribaucour a donné le nom de *surface moyenne* et dont il a fait connaître un grand nombre de propriétés remarquables.

Les droites $\alpha\alpha_1$ dépendent évidemment de deux paramètres et elles engendrent ce que l'on appelle un système de rayons rectilignes ou une congruence. Comme elles sont tangentes à la fois aux deux développables (Σ), (Σ_1), il est clair que toutes les surfaces réglées formées de ces droites qui contiendront, par exemple, l'une d'elles $\alpha\alpha_1$ seront tangentes les unes aux autres aux points α et α_1.

Les plans tangents communs en ces deux points, étant ceux des développables (Δ), (Δ_1), sont, par cela même, tangents au cercle

de l'infini. Or il est aisé d'établir, soit par l'Analyse, soit par la Géométrie, la proposition suivante :

Étant donnée une surface réglée, si, par une de ses génératrices, on mène les deux plans tangents au cercle de l'infini, le segment formé par les deux points de contact de ces plans a pour milieu le point central de la génératrice; de plus il est égal au paramètre de distribution multiplié par $2i$ (¹).

Il suit de là que *la surface moyenne est le lieu des lignes de striction de toutes les surfaces réglées formées avec des droites de la congruence, et que le paramètre de distribution est le même pour toutes celles de ces surfaces qui contiennent une même droite de la congruence.* M. Ribaucour, à qui sont dus ces résultats, les a obtenus par des méthodes qui en font moins bien connaître la véritable origine.

La génération précédente conduit à une solution très simple du problème que nous avons à résoudre. En effet, si l'on considère une développable (Δ) circonscrite à une surface minima, les droites $\alpha\alpha_1$ perpendiculaires aux divers plans tangents de (Δ) formeront une surface réglée dont la ligne de striction devra être décrite par le point de la droite $\alpha\alpha_1$ qui se trouve dans le plan tangent correspondant de (Δ). Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

Pour obtenir toutes les surfaces minima inscrites dans la

(¹) Si l'on prend, en effet, la droite pour axe des z, le plan central pour plan des xz et si l'on place l'origine au point central, la surface réglée a, en tous les points de la droite, les mêmes plans tangents que le paraboloïde défini par l'équation

$$z = a\frac{y}{x},$$

où a est le paramètre de distribution. Pour un plan tangent au cercle de l'infini, on doit avoir

$$\frac{y}{x} = \pm i.$$

On obtient donc pour z les deux valeurs

$$+ai, \quad -ai;$$

d'où résulte immédiatement le théorème.

développable (Δ), *on déterminera toutes les surfaces réglées dont les génératrices sont normales aux plans de* (Δ) *et qui ont pour ligne de striction la courbe engendrée par le point de rencontre de chacune de ces génératrices avec le plan correspondant de* (Δ). *Les arêtes de rebroussement des deux développables circonscrites à la surface réglée et au cercle de l'infini seront les deux courbes* (Γ), (Γ_1) *au moyen desquelles on peut engendrer la surface minima.*

Pour déterminer les surfaces réglées satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer, reprenons les méthodes du n° 255 et rapportons les points de l'espace au trièdre (T) relatif à l'arête de rebroussement (R) de (Δ). La droite qui engendre la surface réglée cherchée aura pour équations, relativement à ce trièdre,

$$x = x_1, \qquad y = y_1,$$

et le déplacement d'un de ses points (x_1, y_1, z_1), dans un mouvement infiniment petit du trièdre, aura pour composantes

$$dx_1 + ds - \frac{y_1\,ds}{\rho}, \quad dy_1 + \frac{x_1\,ds}{\rho} + \frac{z_1\,ds}{\tau}, \quad dz_1 - \frac{y_1\,ds}{\tau}.$$

Le plan tangent en ce point à la surface réglée aura donc pour équation

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{dx_1 + ds - \dfrac{y_1\,ds}{\rho}}{dy_1 + \dfrac{x_1\,ds}{\rho} + \dfrac{z_1\,ds}{\tau}}.$$

Quand z_1 varie, on obtient les plans tangents en tous les points de la droite; en particulier, pour $z_1 = \infty$, on trouve le plan

$$x = x_1.$$

Le plan central, devant être perpendiculaire au précédent, correspondra à la valeur de z_1 donnée par l'équation

$$dy_1 + \frac{x_1\,ds}{\rho} + \frac{z_1\,ds}{\tau} = 0.$$

Comme le point central doit être dans le plan des xy, la valeur de z_1 déterminée par cette équation devra être nulle; il faudra

donc que l'on ait

$$dy_1 + \frac{x_1\, ds}{\rho} = 0$$

ou

$$x_1 = -\rho \frac{dy_1}{ds} = -\frac{dy_1}{d\varepsilon}. \tag{26}$$

Cette formule si simple résout complètement le problème proposé; on choisira arbitrairement y_1, et elle donnera x_1.

Si l'on fait, en particulier, $x_1 = y_1 = 0$, on retrouve la solution particulière, donnée au n° 258. On pourrait aussi prendre $x_1 = 0$, $y_1 = k$, k désignant une constante quelconque, ce qui donnerait une solution particulière nouvelle, un peu plus générale que la précédente; mais il est préférable de résoudre l'équation (26) par de simples constructions géométriques.

Pour cela, nous construirons, d'une manière quelconque, une surface réglée (K′) dont les génératrices soient perpendiculaires aux plans tangents de (Δ), et nous mènerons le plan perpendiculaire à chacune des génératrices de (K′) en son point central. Les différents plans ainsi obtenus envelopperont une développable (Δ′) pour laquelle on aura évidemment une solution du problème proposé, fournie par la surface réglée (K′). Comme les angles de contingence et de torsion sont les mêmes pour les arêtes de rebroussement de (Δ) et de (Δ′), la solution fournie par (K′) relativement à (Δ′) fera connaître les fonctions les plus générales x_1, y_1 vérifiant l'équation (26). Il suffira donc, pour avoir la solution générale du problème posé, de construire la surface (K) dont chaque génératrice a, par rapport au trièdre (T), relatif à un point de l'arête de rebroussement de (Δ), la même position que la génératrice correspondante de (K′) par rapport au trièdre (T′) dont les arêtes sont parallèles à celles de (T) et qui est relatif au point correspondant de l'arête de rebroussement de (Δ′). En d'autres termes, pour avoir la droite de (K), il faudra imprimer à la droite de (K′) une translation égale à celle qui amènerait le trièdre (T′) en coïncidence avec le trièdre (T).

CHAPITRE X.

LE PROBLÈME DE PLATEAU.

DÉTERMINATION DE LA SURFACE MINIMA PASSANT PAR UN CONTOUR DONNÉ COMPOSÉ DE LIGNES DROITES, OU DE PLANS QUE LA SURFACE DOIT COUPER NORMALEMENT.

Historique. — Indication des travaux de Riemann, de M. Weierstrass et de M. Schwarz. — Exposition générale de la méthode à suivre dans le cas où il n'y a pas de point de ramification. — Surface minima passant par deux droites, — coupant à angle droit deux plans donnés et contenant une droite donnée, — passant par trois droites dont l'une coupe les deux autres, — passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche quelconque. — Introduction des points de ramification. — Propriétés géométriques relatives à ces points. — Solution générale du problème proposé.

261. Nous allons maintenant compléter l'exposition des propriétés les plus simples des surfaces minima en indiquant les principaux résultats qu'ont obtenus les géomètres dans l'étude de la question suivante, posée par Lagrange, et qui a donné naissance à toute la théorie.

Déterminer la surface minima, parfaitement continue ou assujettie à des discontinuités de nature connue, passant par un contour fermé.

On sait que Plateau a résolu ce problème par l'expérience en plongeant le contour donné, réalisé physiquement, dans une dissolution de liquide glycérique. L'Analyse mathématique n'a pu, jusqu'ici, imaginer aucune méthode générale permettant de commencer l'étude de cette belle question. Toutefois, dans le cas, particulièrement intéressant, où le contour est formé de lignes droites, et dans celui où quelques-unes des portions de ce contour sont remplacées par des plans que la surface doit couper normalement, les propositions que nous avons fait connaître rela-

tivement aux diverses représentations conformes de la surface ont permis de préparer la solution du problème, et même de le résoudre d'une manière complète pour certaines formes simples du contour. Les principaux résultats acquis à la Science dans cet ordre de recherches sont dus à Riemann, à M. Weierstrass et à M. Schwarz.

262. Nous avons déjà cité plusieurs fois le Mémoire fondamental de Riemann, présenté, le 6 janvier 1867, par M. Hattendorf à la Société Royale de Goettingue et inséré dans le t. XIII des Mémoires de cette Société [1]. Ce beau travail, qui figure dignement à côté des plus importantes productions de son illustre auteur, contient des applications très intéressantes des vues nouvelles et profondes que Riemann a apportées en Analyse. On peut le considérer comme composé de deux parties bien distinctes. Dans la première, Riemann étudie d'une manière générale les surfaces minima et il y fait connaître, en dehors des propositions que nous avons établies, une formule remarquable qui n'a pu trouver place dans notre théorie, et qui est relative à l'aire d'une portion limitée de la surface; il y emploie en particulier le système de coordonnées dont la première idée appartient à M. O. Bonnet (nº **181**); c'est-à-dire qu'il détermine un point de la sphère et le point correspondant de la surface minima par la valeur de la variable complexe qui est l'affixe de ce point (nºs **30** et **164**). Les transformations de coordonnées, dont Riemann fait usage à différentes reprises, mettent naturellement en évidence le fait si souvent signalé dans les pages qui précèdent : *Toute transforma-*

---

[1] Dans une note placée au commencement du Mémoire (*Riemann's gesammelte Werke*, p. 283), M. Hattendorf nous apprend qu'il a dû rédiger entièrement e Mémoire d'après un manuscrit de Riemann qui ne contenait absolument que les formules et les résultats. Ce manuscrit, qui est daté des années 1860 et 1861, a été envoyé à M. Hattendorf en avril 1866. On sait que Riemann est mort en Italie au mois de juillet suivant.

Dans un Travail présenté comme thèse en 1880 à la Faculté des Sciences, M. Niewenglowski a fait connaître en France les principaux résultats obtenus par Riemann. *Voir* le Mémoire : *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné,* inséré aux *Annales de l'École Normale,* t. IX, 2ᵉ série, p. 227.

tion des coordonnées, ou tout déplacement, s'exprime par une substitution linéaire particulière effectuée sur la variable complexe, proposition dont l'importance et l'intérêt n'ont été pleinement reconnus que depuis la publication des beaux travaux de M. Klein relatifs à l'intégration des équations linéaires du second ordre, à l'icosaèdre et à la résolution des équations algébriques.

La seconde Partie du Mémoire est presque entièrement consacrée à la détermination de la surface minima limitée par un polygone gauche dont tous les côtés sont rectilignes (¹). Riemann n'exclut même pas le cas où le contour serait partiellement ouvert et où la surface devrait avoir des segments infinis, analogues à cette portion de l'hélicoïde gauche à plan directeur qui s'étend à l'infini entre deux génératrices rectilignes de la surface. Après avoir développé la solution générale du problème, solution qui exige la formation, toujours possible, d'une équation différentielle linéaire et la résolution d'un système d'équations transcendantes dont l'étude est laissée de côté, au moins dans le cas général, Riemann aborde les applications et examine successivement les contours suivants :

1° *Deux droites infinies qui ne sont pas dans le même plan.*

Si l'on suppose que le secteur infini s'étendant entre les deux droites n'a pas de discontinuité ni de point de ramification, on trouve l'hélicoïde gauche à plan directeur.

2° *Trois droites, dont deux se coupent, la troisième étant parallèle au plan des deux autres.*

Sous les réserves précédentes, la solution, ici encore, est complète et les formules définitives sont obtenues.

3° *Trois droites placées d'une manière quelconque dans l'espace.*

(¹) Riemann y montre aussi que l'on peut résoudre le problème de Plateau pour le cas où le contour est composé de deux cercles quelconques situés dans deux plans parallèles. Il suffit d'admettre que toutes les sections déterminées par des plans parallèles aux plans des deux cercles sont des cercles. La surface obtenue dépend des fonctions elliptiques.

Pour bien se représenter le problème résolu par Riemann, on peut imaginer un hexagone gauche. Si trois côtés non consécutifs de cet hexagone s'éloignent indéfiniment, les trois autres restant fixes, la surface minima qui était limitée par les six côtés de l'hexagone tend vers une surface à trois secteurs infinis, dont on aperçoit aisément la forme générale. C'est cette surface que détermine Riemann.

4° *Un quadrilatère gauche quelconque.*

Riemann forme l'équation linéaire du second ordre dont dépend la solution du problème. Cette équation, que nous donnerons plus loin, a une forme très remarquable qui la rapproche de l'équation de Lamé. On n'a pu encore l'intégrer dans le cas le plus général; Riemann considère le cas particulier où les quatre côtés du quadrilatère sont aussi les arêtes d'un tétraèdre régulier, et il obtient alors la solution du problème par une méthode directe et très élégante, que les travaux déjà rappelés de M. Klein nous aident à comprendre dans tous ses détails.

5° *Trois droites dont l'une rencontre les deux autres*, en sorte que la surface a deux sommets et un secteur infini.

6° *Deux polygones rectilignes non étoilés situés dans deux plans parallèles.*

Ces deux derniers exemples ont été publiés pour la première fois dans les Œuvres de Riemann (¹).

263. Les résultats précédents demeurent, aujourd'hui encore, les plus complets et les plus généraux parmi ceux qui ont été publiés sur le problème qui nous occupe. Mais, quelques jours avant la présentation du Mémoire de Riemann à la Société de Göttingue, le 20 décembre 1866, M. Weierstrass avait communiqué à l'Académie de Berlin, dans une Note de deux pages (²), le résumé de ses recherches sur le même sujet.

Les résultats annoncés par M. Weierstrass sont en parfait

(¹) *Riemann's gesammelte Werke*, p. 417 à 426.

(²) *Monatsberichte der K. P. Akademie*, p. 855; 1866.

accord avec ceux de Riemann. Malheureusement cet illustre géomètre n'a pas indiqué d'une manière détaillée, au moins dans un travail imprimé, la méthode qu'il a suivie et les cas particuliers qu'il a traités. Nous devons signaler toutefois, dans le court résumé qu'il a donné, une indication très précieuse résultant d'une forme remarquable, sur laquelle nous reviendrons plus loin, donnée aux équations qui déterminent la surface minima.

264. Les premières recherches de M. Schwarz ont été publiées avant les précédentes; mais elles sont relatives à un problème particulier. Dans une courte Note insérée en 1865 aux Comptes rendus de l'Académie de Berlin ([1]), M. Schwarz se reporte à des études antérieures relatives à la représentation conforme de la surface d'un polyèdre sur la sphère, études qui ont été publiées dans le tome LXX du *Journal de Crelle;* et il annonce que la solution de ce problème de la représentation conforme pour les différents polyèdres réguliers permet de déterminer, par l'application d'un théorème de M. Weingarten qui sera étudié dans la suite de cet Ouvrage, un certain nombre de surfaces minima sur lesquelles se trouvent une infinité de droites. Ces droites ne sont pas isolées les unes des autres; elles se rencontrent mutuellement de telle manière qu'un certain nombre d'entre elles puissent servir de limite à une portion de la surface, simplement connexe. C'est ainsi que la surface minima dérivée du cube, surface dont la détermination s'effectue au moyen des fonctions elliptiques de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, contient une infinité de quadrilatères gauches égaux; chacun d'eux est formé avec quatre arêtes d'un tétraèdre régulier et permet de limiter une certaine portion de la surface. On a donc une solution, obtenue il est vrai d'une manière indirecte, du problème de Lagrange et de Plateau pour le contour formé par ce quadrilatère régulier.

Le second travail de M. Schwarz est un Mémoire beaucoup plus étendu, couronné en 1867 par l'Académie de Berlin et publié

([1]) H. Schwarz, *Ueber die Minimums-fläche deren Begrenzung als ein von vier Kanten eines regularen Tetraeders gebildetes, windschiefes Viereck gegeben ist* (*Monatsberichte der K. P. Akademie*, p. 149-153; 1865).

en 1871 sous le titre suivant : *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche* (¹). L'auteur y aborde, cette fois par des méthodes directes, la détermination de la surface minima passant par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et il montre que l'on pourra donner la solution complète du problème dans le cas particulier où le quadrilatère gauche est assujetti à l'unique condition d'avoir un plan de symétrie, passant nécessairement par deux de ses sommets opposés. Il considère en particulier, comme Riemann dont le Mémoire était encore inédit à l'époque où M. Schwarz communiquait son travail à l'Académie de Berlin, le cas remarquable où les quatre côtés du quadrilatère gauche sont les arêtes d'un tétraèdre régulier; il retrouve alors la surface déjà définie dans sa Communication précédente; on l'obtient en faisant, dans les formules de M. Weierstrass (n° **191**),

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-14u^4+u^8}}.$$

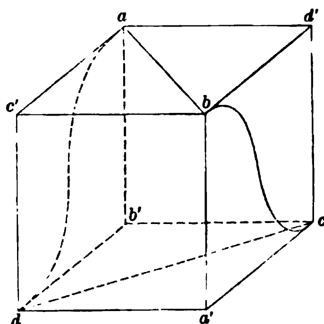
Enfin, dans un Appendice qui termine le Mémoire, l'éminent géomètre fait connaître certaines surfaces minima, pour lesquelles la fonction $\mathfrak{F}(u)$ est l'inverse de la racine carrée d'un polynôme du huitième degré, et qui contiennent des droites avec lesquelles on peut former des polygones gauches d'une nature spéciale, limitant certaines portions de la surface. Supposons, par exemple, que, dans un parallélépipède rectangle, on supprime les six arêtes qui aboutissent à deux sommets opposés; il restera un hexagone gauche, par lequel on pourra faire passer une des surfaces définies par M. Schwarz; la portion de surface limitée par cet hexagone sera simplement connexe et ne contiendra aucun point singulier.

265. Un autre travail du même auteur, *Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen,* imprimé en 1872 (²), contient l'étude détaillée et la solution complète d'un problème proposé en ces termes dès 1816 par Gergonne (³) :

(¹) Harrwitz und Gossmann; in-4°, Berlin, 1871.
(²) *Monatsberichte der K. P. Akademie;* janvier 1872.
(³) *Annales de Gergonne,* t. VII, p. 99.

Couper un cube en deux parties de telle manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses de deux faces opposées et que l'aire de cette section terminée à la surface du cube soit un minimum. Donner en outre l'équation de la courbe suivant laquelle la surface coupante coupe chacune des autres faces de ce cube.

Fig. 21.



On trouve à la page 148 du tome VII des *Annales de Gergonne* un essai sur ce problème dû à Tédénat, recteur de l'Académie de Nîmes, l'un des rédacteurs les plus assidus de ce Journal; mais la solution proposée est inexacte. Le calcul des variations permet, en effet, d'établir que la surface cherchée doit couper à angle droit deux des faces latérales du cube, et l'hélicoïde considéré par Tédénat ne satisfait pas à cette condition.

M. Schwarz reprend le problème de Gergonne, ou plutôt il se propose de déterminer toutes les surfaces minima, parmi lesquelles doit se trouver la surface cherchée, qui passent par les deux diagonales inverses de deux faces opposées et qui coupent à angle droit deux autres faces opposées du cube. Le résultat obtenu est particulièrement intéressant : de même qu'il y a une infinité d'hélicoïdes gauches à plan directeur passant par deux droites données, il y a aussi une infinité de surfaces satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer. Il n'est pas difficile de choisir parmi toutes ces surfaces celle dont l'aire est réellement un minimum.

Dans ce même travail, M. Schwarz fait aussi connaître une extension, très digne de remarque, des résultats de Riemann et de

M. Weierstrass; il substitue au problème abordé par ces deux géomètres le suivant, qui est beaucoup plus général et se résout, comme nous le verrons, par l'emploi des mêmes principes :

On donne une chaîne continue fermée, composée de segments rectilignes, ou de plans, ou de segments rectilignes et de plans; et l'on propose de déterminer une surface minima, à connexion simple, ne contenant aucun point singulier dans son intérieur, limitée par les segments rectilignes et les plans de la chaîne et coupant ces derniers à angle droit.

Par exemple, si l'on considère (*fig.* 22) [p. 437] deux tiges AB, AC réunies en A et appuyant leurs extrémités B et C contre une lame de verre, la surface que l'on obtient en plongeant le système entier dans le liquide glycérique s'appuie sur les tiges AB, AC et coupe normalement la lame de verre. Cette surface peut être étudiée et définie analytiquement par des méthodes toutes semblables à celles qui avaient été employées antérieurement dans le cas spécial des contours exclusivement composés de lignes droites.

Nous nous contenterons des indications précédentes et nous ferons maintenant connaître les principes sur lesquels reposent les recherches dont nous venons d'exposer les résultats, en négligeant les détails qui exigeraient beaucoup de développements et que l'on trouvera dans les Mémoires originaux.

266. Au Chapitre IV [p. 309], nous avons signalé deux tracés géographiques différents de la surface minima. L'un d'eux est déterminé par la représentation sphérique de la surface; si l'on adopte les coordonnées u, u_1, si souvent employées dans les pages précédentes, la variable complexe u est l'affixe d'un point réel de la sphère qui est l'image du point correspondant de la surface minima, et la représentation ainsi obtenue constitue, comme l'a montré M. O. Bonnet (n° **202**), un premier tracé géographique de la surface minima sur la sphère de rayon 1. Si maintenant on introduit la variable complexe définie par l'équation

$$(1) \qquad \sigma = \int \sqrt{2\mathcal{F}(u)}\, du,$$

et qu'on la représente sur le plan, on obtiendra un nouveau tracé

géographique dans lequel, nous l'avons vu (n° **204**), les lignes de courbure auront pour représentation des parallèles aux axes coordonnés, tandis que les lignes asymptotiques seront représentées par des parallèles aux bissectrices de ces axes.

La considération simultanée des deux représentations conformes précédentes joue un rôle capital dans les raisonnements qui vont suivre et conduit par une voie naturelle à la solution du problème proposé.

Si l'on découpe sur une surface minima un segment limité (M), à connexion simple et ne contenant aucun point singulier dans son intérieur, l'intégrale σ sera, sous certaines conditions que nous indiquerons plus loin, une fonction uniforme ayant une valeur finie et bien déterminée pour chaque point de (M). La représentation plane de cette portion de surface sera alors une aire plane, limitée, à connexion simple, qui pourra, dans certaines parties, se composer de plusieurs feuillets et qui se terminera à la courbe dont les points correspondent à ceux de la limite de (M). Or, *si l'on veut que* (M) *soit limitée par des droites ou par des plans qu'elle coupera normalement, les différentes portions du contour seront des lignes asymptotiques de la surface si elles sont des droites, ou des lignes de courbure si elles sont dans les plans que la surface doit couper normalement.* Par conséquent, il leur correspondra, dans le tracé géographique plan, des parallèles aux axes coordonnés dans le second cas, et des parallèles aux bissectrices de ces axes dans le premier. Ainsi *ce tracé géographique se composera d'une aire plane* (Σ) *limitée par des droites dont la direction au moins sera connue et qui se succéderont dans un ordre déterminé.*

Étudions maintenant la représentation sphérique de (M). Elle se compose d'une aire (S), pouvant recouvrir plusieurs fois certaines parties de la sphère ; mais il résulte, comme nous le verrons, des hypothèses faites sur σ que cette aire (S) n'a aucun point de ramification dans son intérieur. Ici encore on peut déterminer la courbe limite de (S). En effet, pour chaque portion de droite comprise dans le contour, la représentation sphérique sera un arc, plus ou moins étendu, du grand cercle dont le plan est perpendiculaire à cette droite. S'il y a, dans le contour considéré, des plans que la surface doit couper à angle droit, la courbe limite

de la surface située dans ce plan sera représentée sur la sphère par une portion du grand cercle dont le plan est parallèle au plan correspondant du contour. On voit donc que *la représentation sphérique* (S) *du segment* (M) *sera limitée par des arcs de grands cercles dont la position sera connue et qui se succéderont dans un ordre parfaitement déterminé.*

Les deux aires (Σ) et (S) constituent deux représentations conformes de la surface (M). Si celle-ci était connue, il est clair que l'on pourrait obtenir une représentation directe et conforme de l'aire sphérique (S) sur l'aire plane (Σ). Inversement, si l'on a pu déterminer directement ce tracé géographique de (S) sur (Σ), c'est-à-dire si l'on a exprimé σ en fonction de u, on aura

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\frac{d\sigma^2}{du^2}; \tag{2}$$

et, la fonction $\mathcal{F}(u)$ étant ainsi connue pour toutes les valeurs de u qui correspondent aux diverses parties de (S), le segment (M) sera pleinement déterminé. Nous sommes donc ramenés à la solution du problème suivant :

Réaliser une représentation conforme d'une aire sphérique (S), *limitée par des arcs de grands cercles, sur une aire plane* (Σ), *limitée par des droites.*

Or, cette solution est contenue implicitement, au moins pour les cas les plus simples, dans les développements donnés au Chapitre IV du Livre II [p. 170]. On représentera les deux aires (Σ) et (S) sur la moitié supérieure du plan, ce qui donnera σ et u en fonction d'une variable t assujettie à la seule condition que sa partie imaginaire soit positive. Puis on portera ces valeurs de u et de σ dans les formules de M. Weierstrass, où l'on aura remplacé $\mathcal{F}(u)$ par sa valeur tirée de la formule (2); ce qui donnera

$$\left\{\begin{aligned} x &= \Re\int\frac{1-u^2}{2}\frac{d\sigma^2}{du}, \\ y &= \Re\int i\frac{1+u^2}{2}\frac{d\sigma^2}{du}, \\ z &= \Re\int u\frac{d\sigma^2}{du}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

u et σ étant des fonctions connues de la variable t.

267. Nous allons indiquer différents exemples auxquels on peut appliquer la méthode précédente.

Proposons-nous d'abord de déterminer la surface minima (M), nécessairement infinie, limitée par deux droites quelconques. Construisons, sur la sphère de rayon 1, les deux grands cercles COC′O′, DOD′O′ se coupant en O, O′, dont les plans sont perpendiculaires à ces droites; et soit $\alpha\pi$ l'angle COD de ces deux cercles, égal à celui des deux droites. La surface cherchée (M) aura pour représentation sphérique une aire limitée par ces deux cercles. Choisissons, par exemple, pour cette aire, le fuseau OCO′D, d'angle $\alpha\pi$. Si l'on prend pour axe des z le diamètre O′O et pour plan des yz le plan ODO′, l'origine des coordonnées étant toujours au centre de la sphère, le point O correspondra à la valeur zéro de la variable u et le tracé géographique du fuseau OCO′D sur la partie supérieure du plan sera déterminé par la formule

$$u = t^{\alpha}; \tag{4}$$

car on voit immédiatement que, lorsque l'argument de t varie entre o et π, celui de u varie entre o et $\alpha\pi$.

Mais, il importe de le remarquer, on peut imaginer une infinité d'aires sphériques ayant les mêmes limites que le fuseau précédent; si l'on fait tourner, en effet, le demi-cercle ODO′, dans tel sens que l'on voudra, autour de OO′, en continuant indéfiniment le mouvement, il viendra périodiquement coïncider avec l'une des moitiés du second cercle OCO′C′, et la $n^{\text{ième}}$ coïncidence se produira après que ODO′ aura fait $n - 1$ demi-révolutions.

L'aire sphérique ainsi engendrée par le demi-cercle se composera de plusieurs feuillets superposés et pourra recouvrir la sphère autant de fois qu'on le voudra; il sera évidemment permis de la substituer au fuseau précédent et de la considérer comme la représentation sphérique de la surface cherchée. On reconnaît d'ailleurs aisément que l'on embrasse tous les cas que nous venons d'énumérer en augmentant α, dans la formule (4), d'un nombre entier quelconque, positif ou négatif, ou, ce qui est la même chose, en convenant de désigner par $\alpha\pi$ une quelconque des déterminations de l'angle des deux droites données.

Examinons maintenant le second tracé géographique, la repré-

sentation plane (Σ) de (M). Si l'on suppose que les deux droites qui limitent (M) appartiennent à un même système de lignes asymptotiques, cette représentation se composera d'une bande du plan comprise entre deux parallèles à une même bissectrice des axes coordonnés. Cette bande peut être considérée comme un quadrilatère dont deux angles opposés seraient égaux à π, les deux autres étant nuls. Par suite, en appliquant la formule donnée au n° 132 et en remarquant que les angles nuls correspondent aux valeurs o, ∞ de t, on aura

$$\sigma = Ce^{ih}\int \frac{dt}{t} = Ce^{ih}\log t.$$

Lorsque la variable t varie de o à ∞, l'argument de σ doit être égal à $\frac{\pi}{4}$ ou à $-\frac{\pi}{4}$. Le choix est indifférent, par suite de la présence du radical $\sqrt{\mathcal{F}(u)}$ dans l'expression de σ. Posons

$$(5) \qquad \sigma = Ce^{-i\frac{\pi}{4}}\log t.$$

On aura alors

$$\sigma = \frac{C}{\alpha}e^{-i\frac{\pi}{4}}\log u,$$

et, par suite, en prenant la dérivée par rapport à u,

$$\sqrt{2\mathcal{F}(u)} = \frac{C}{\alpha u}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ou

$$\mathcal{F}(u) = \frac{iK}{u^2},$$

K désignant une constante réelle. Nous retrouvons la valeur de $\mathcal{F}(u)$ qui caractérise un hélicoïde gauche à plan directeur (n° 196).

Mais, si l'on veut déterminer la constante C, il vaudra mieux substituer les valeurs de σ et de u en fonction de t dans les formules (3). On aura ainsi

$$z = \mathcal{R}\,\frac{-iC^2}{\alpha}\log t.$$

Si l'on remplace t par $\rho e^{i\theta}$, ρ et θ désignant le module et l'argument

de t, θ variera entre o et π et l'on aura

$$z = \frac{C^2}{\alpha}\theta.$$

Les deux droites, parallèles au plan des xy, qui limitent la surface (M) correspondent aux valeurs o et π de θ. On a donc, en désignant par Δ leur plus courte distance,

$$\Delta = \frac{C^2\pi}{\alpha},$$

et les formules (3) prennent ici la forme définitive

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathcal{R}\int i\Delta\frac{t^\alpha - t^{-\alpha}}{2\pi}\frac{dt}{t} = \mathcal{R}\frac{i\Delta}{2\pi\alpha}(t^\alpha + t^{-\alpha}),\\ y &= \mathcal{R}\int \Delta\frac{t^\alpha + t^{-\alpha}}{2\pi}\frac{dt}{t} = \mathcal{R}\frac{\Delta}{2\pi\alpha}(t^\alpha - t^{-\alpha}),\\ z &= \mathcal{R}\int -\frac{i\Delta}{\pi}\frac{dt}{t} \qquad = \mathcal{R} - \frac{i\Delta}{\pi}\log t,\end{aligned}\right.$$

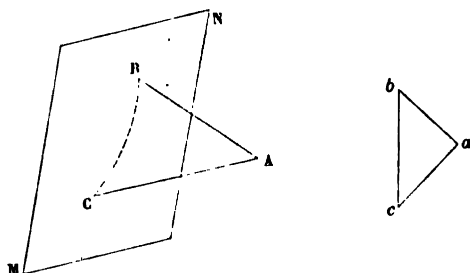
où tout est connu. Il suffira de donner à α toutes les valeurs de l'angle pour obtenir tous les hélicoïdes qui contiennent les deux droites.

268. Dans l'exemple précédent, il y a une certaine indétermination, relativement au moins à la représentation sphérique; et cette même indétermination, qui se présente, comme nous l'avons indiqué, dans les solutions si étudiées données par M. Schwarz pour certains problèmes particuliers, se reproduirait évidemment dans les problèmes plus compliqués que nous avons à examiner. Voici comment on pourra opérer lorsqu'on voudra, négligeant tous les cas possibles, obtenir, par exemple, la surface réellement minimum, celle qui est réalisée par les expériences de Plateau.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer la surface (M) qui est limitée par deux droites AB, AC et qui coupe normalement un plan MN (*fig.* 22). Soit BC la courbe inconnue suivant laquelle la surface cherchée coupe le plan MN. L'expérience apprend que cette courbe, qui se réduit à une droite quand le plan BAC est perpendiculaire au plan MN, n'a pas d'inflexion et est placée, par rapport à la droite BC, du même côté que la projection de A sur le plan MN. Les normales en A, B, C à (M) sont connues de

direction; car la normale en A est perpendiculaire au plan ABC, et la normale en B, par exemple, doit se trouver dans le plan MN et être perpendiculaire à AB. D'ailleurs le sens de la normale en A détermine celui des normales en B, C et, généralement, en tout point de (M). On voit donc que la surface (M) aura pour représentation sphérique un triangle sphérique dont les sommets seront parfaitement déterminés.

Fig. 22.



Considérons maintenant la représentation plane. Les lignes AB, AC auront pour images des parallèles aux bissectrices des axes coordonnés, tandis que la ligne de courbure BC sera représentée par une parallèle à l'un des axes. Il faut donc admettre que cette représentation est donnée par la surface d'un triangle rectangle isoscèle *abc* dont l'hypoténuse est parallèle à l'un des axes coordonnés.

Soient $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ les angles du triangle sphérique qui sert de représentation à (M). En conservant toutes les notations du n° 136 et en supposant que les sommets λ, μ, ν correspondent aux valeurs 0, 1, ∞ de t, nous aurons, pour déterminer la représentation de ce triangle sur la moitié supérieure du plan, la formule

$$(7) \qquad Cu = \frac{t^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t)}{F(\alpha, \beta, \gamma, t)},$$

α, β, γ étant déterminés par les formules

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu+\nu), & \alpha+1-\gamma = \frac{1}{2}(1+\lambda-\mu+\nu), \\ \beta = \frac{1}{2}(1-\lambda-\mu-\nu), & \beta+1-\gamma = \frac{1}{2}(1+\lambda-\mu-\nu), \\ \gamma = 1-\lambda, & 2-\gamma = 1+\lambda, \end{array} \right.$$

et le module $\sqrt{CC_0}$ de C ayant pour valeur

$$(9)\quad \sqrt{CC_0} = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)}\sqrt{-\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}}.$$

Quant à la représentation plane, on l'obtiendra en appliquant la formule (14) du n° 132 [p. 179] au triangle rectangle isoscèle. En supposant que le sommet λ corresponde au point de rencontre A des deux droites et, par conséquent, au sommet a de l'angle droit du triangle rectangle, il faudra faire dans cette formule

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad c = \infty,$$
$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{4}, \qquad \gamma = \frac{1}{4},$$

ce qui donnera

$$(10)\qquad \sigma = \sqrt{K}\int \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\frac{3}{4}}},$$

K étant une constante réelle afin que l'hypoténuse du triangle soit dirigée parallèlement à l'un des axes coordonnés.

L'exemple précédent, qui a été traité pour la première fois, comme nous l'avons indiqué (n° 264), par M. Schwarz, a été, dans ces derniers temps, étudié d'une manière approfondie dans un intéressant travail de M. Neovius (¹).

269. On peut traiter de la même manière le cas, considéré par Riemann, où le contour est formé (*fig.* 23) par une droite AB qui en rencontre deux autres AC, BC′. Ici encore la représentation sphérique du segment (M) sera un triangle sphérique. La représentation sphérique du point A sera située sur le rayon perpendiculaire à AB et à AC, la représentation sphérique de B sera située sur le rayon perpendiculaire à AB et à BC′ et enfin la représentation sphérique du point situé à l'infini, soit sur AC, soit sur BC′, sera située sur le rayon perpendiculaire à ces deux droites. Nous adoptons ici l'hypothèse la plus simple relativement à ce secteur

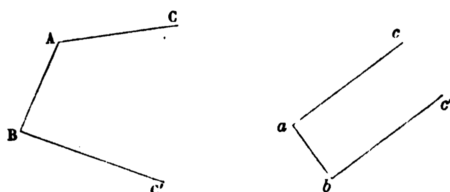
---

(¹) Neovius, *Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen*. Helsingfors, 1883.

infini; il faut concevoir le segment (M) comme étant limité par une droite CC′ qui rencontre AC et BC′ et s'éloigne indéfiniment.

Quant à la représentation plane, elle sera évidemment formée d'une droite ab, correspondante à AB, parallèle à l'une des bissectrices des axes, et de deux droites ac, bc' perpendiculaires à ab. On peut envisager cette figure comme un triangle dont l'un des sommets s'est éloigné indéfiniment. Si l'on suppose que les valeurs

Fig. 23.



o, 1, ∞ de t correspondent respectivement aux points a, b et c, c', la formule, déjà rappelée, du n° **132** nous donnera ici

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{K}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}, \tag{11}$$

K étant une constante réelle. Cette formule, jointe à celles qui définissent la représentation sphérique, déterminera la surface cherchée.

270. Il nous reste à étudier le plus important et le plus difficile des problèmes auxquels peut encore s'appliquer la méthode élémentaire précédente. Supposons que le contour donné soit formé par un quadrilatère gauche quelconque, ABCD. On aperçoit ici encore d'une manière très nette la représentation sphérique de la surface. Elle est formée par un quadrilatère sphérique dont les sommets sont parfaitement déterminés, et elle est la même que celle du paraboloïde hyperbolique passant par les quatre côtés du quadrilatère gauche (¹). On peut toujours supposer (n° **128**) que

(¹) On peut signaler à ce sujet un rapprochement très curieux donné par M. Schwarz dans une des notes du Mémoire déjà cité : *Bestimmung einer speciellen*

les sommets consécutifs du quadrilatère correspondent aux valeurs $0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty$ de t, k désignant une constante réelle plus petite que 1. D'après les méthodes développées aux n°s 134 et 135, on obtiendra le tracé géographique sur la moitié supérieure du plan du quadrilatère sphérique qui est la représentation de (M) en posant

$$u = \frac{\theta_2}{\theta_1},$$

θ_1 et θ_2 étant deux solutions particulières, convenablement choisies, d'une équation linéaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0, \tag{12}$$

dont les coefficients p et q doivent satisfaire à l'unique condition

$$2q - \frac{p^2}{2} - \frac{dp}{dt} = \{u, t\}; \tag{13}$$

$\{u, t\}$ ayant ici la valeur suivante

$$\{u, t\} = \frac{1-\alpha_1^2}{2t^2} + \frac{1-\alpha_2^2}{2(1-t)^2} + \frac{(1-\alpha_3^2)k^4}{2(1-k^2t)^2} + \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t-1} + \frac{h_3 k^2}{k^2 t - 1}, \tag{14}$$

avec les relations

$$\left\{\begin{aligned} & h_1 + h_2 + h_3 = 0, \\ & \frac{1-\alpha_1^2}{2} + \frac{1-\alpha_2^2}{2} + \frac{1-\alpha_3^2}{2} + h_2 + \frac{h_3}{k^2} = \frac{1-\alpha_4^2}{2}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Dans ces formules, $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, $\alpha_4\pi$ désignent les angles du quadrilatère qui correspondent respectivement aux sommets $0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty$; h_1, h_2, h_3 sont des constantes arbitraires et inconnues comme le module k^2, assujetties uniquement à vérifier les relations (15); il reste donc deux constantes arbitraires dont il faut fixer la valeur. Les théorèmes généraux établis par M. Schwarz

---

Minimalfläche. Dans le cas où le quadrilatère est régulier et a ses angles égaux à $\frac{\pi}{3}$, la différence entre l'aire du paraboloïde et celle de la surface minima est inférieure à $\frac{1}{800}$ de la valeur de l'une quelconque des aires; de plus, les deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre au point central du quadrilatère.

permettent d'affirmer (n° 135) qu'il sera toujours possible de déterminer ces constantes de manière à obtenir effectivement, par le quotient de deux solutions particulières convenablement choisies de l'équation (12), la représentation cherchée du quadrilatère sphérique sur la partie supérieure du plan.

La représentation plane (Σ) du segment cherché (M) est évidemment limitée par les côtés d'un rectangle; on aura donc (n° 132)

$$(16) \qquad \sigma = \sqrt{\mathrm{H}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2 t)}},$$

H désignant une constante réelle.

271. On voit que la surface serait complètement déterminée par des quadratures si l'on savait intégrer l'équation linéaire (12). Parmi les formes différentes que peut recevoir cette équation, nous signalerons la suivante.

Adoptons pour la fonction p, qui peut être choisie arbitrairement, une expression de la forme

$$p = \frac{e_1}{t} + \frac{e_2}{t-1} + \frac{e_3 k^2}{k^2 t - 1}.$$

On démontre aisément que les termes en $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{(t-1)^2}$, $\frac{1}{(k^2 t - 1)^2}$ pourront disparaître de l'expression de q. Il suffit, pour cela, que e_1, e_2, e_3 satisfassent aux équations

$$(e_1 - 1)^2 = \alpha_1^2, \qquad (e_2 - 1)^2 = \alpha_2^2, \qquad (e_3 - 1)^2 = \alpha_3^2.$$

Si l'on prend, par exemple,

$$(17) \qquad p = \frac{\alpha_1 + 1}{t} + \frac{\alpha_2 + 1}{t-1} + k^2 \frac{\alpha_3 + 1}{k^2 t - 1},$$

on aura

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2q = {} & \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{t(t-1)} + \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)k^2}{t(k^2 t - 1)} \\ & + \frac{(\alpha_3+1)(\alpha_2+1)k^2}{(t-1)(k^2 t - 1)} + \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t-1} + \frac{k^2 h_3}{k^2 t - 1}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (12) peut donc se ramener à la forme suivante :

$$(19) \quad t(1-t)(1-k^2 t)\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\mathrm{M}t^2 + \mathrm{N}t + \mathrm{P})\frac{d\theta}{dt} + (\mathrm{M}'t + \mathrm{N}')\theta = 0,$$

qui a été l'objet d'un grand nombre de recherches ; car elle est la plus simple de toutes les équations du second ordre, après l'équation de Gauss dont elle peut être considérée comme une généralisation ([1]). On n'a pu jusqu'ici l'intégrer que dans un petit nombre de cas particuliers; et même les résultats obtenus dans cette voie ne seraient pas toujours applicables à la question que nous avons à résoudre.

272. Si le quadrilatère gauche a un plan de symétrie passant par deux sommets opposés, la surface qui donne la solution du problème de Plateau devra nécessairement, si elle est unique comme il est naturel de l'admettre, avoir le même plan de symétrie que le quadrilatère et, par conséquent, couper ce plan à angle droit. Par suite, si l'on se propose de déterminer seulement la portion de cette surface qui se trouve d'un côté déterminé de ce plan de symétrie, on sera ramené au problème que nous avons résolu précé-

---

([1]) Si l'on prenait pour p la valeur suivante

$$p = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2(t-1)} + \frac{k^2}{2(k^2 t - 1)},$$

on obtiendrait l'équation même donnée par Riemann (*Gesammelte Werke*, p. 308). En substituant à t la variable u définie par l'équation

$$t = \mathrm{sn}^2 u,$$

et qui ne diffère de σ que par un facteur constant, on donnera à cette équation la forme élégante

$$\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{du^2} = \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} + \left(\alpha_2^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 u} + \left(\alpha_3^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{k^2 \mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u} + \left(\alpha_4^2 - \frac{1}{4}\right)k^2 \mathrm{sn}^2 u + l,$$

l étant une constante arbitraire que l'on peut substituer à h_1. Dans un article inséré au t. XCIV (p. 1645) des *Comptes rendus*, j'ai montré que cette équation peut être intégrée, par l'application des belles méthodes de M. Hermite, de la même manière que l'équation de Lamé, qu'elle comprend comme cas particulier, toutes les fois que les nombres $\alpha_1 - \frac{1}{2}$, $\alpha_2 - \frac{1}{2}$, $\alpha_3 - \frac{1}{2}$, $\alpha_4 - \frac{1}{2}$ sont entiers.

demment (n° 268). Telle est la méthode suivie par M. Schwarz dans les Mémoires que nous avons analysés.

273. Ici se terminent les applications que nous voulions donner de la méthode générale. Dans chaque cas particulier, nous avons obtenu les valeurs de σ et de u en fonction de t; il suffira de porter ces valeurs dans la formule (3) et de donner à t toutes les valeurs dont la partie imaginaire est positive. Mais, pour compléter la théorie précédente, il nous reste à démontrer que la surface à laquelle on est ainsi conduit donne effectivement la solution du problème proposé. Voici comment on peut établir ce résultat essentiel.

On reconnaîtra d'abord aisément que le segment de surface (M) n'a aucun point singulier dans son intérieur. Négligeons ce premier point, qui apparaîtra de la manière la plus claire dans une autre méthode que nous donnerons au Chapitre suivant, et qu'il est d'ailleurs très aisé de démontrer. Il suffira donc de prouver que la courbe limite du segment (M) se compose de droites et de courbes planes, et qu'elle peut être identifiée avec le contour donné *a priori* dans chaque cas particulier.

Pour le démontrer, nous donnerons à t les valeurs réelles, qui fournissent tous les points de la limite du segment, et nous supposerons d'abord que t varie seulement dans l'intervalle auquel doit correspondre une des droites (d) du contour.

D'après la détermination de σ, la portion considérée du contour, étant représentée sur le plan par une parallèle à l'une des bissectrices des axes, sera nécessairement une ligne asymptotique; et, d'après la détermination de u, cette même portion du contour aura pour représentation sphérique un arc de grand cercle dont le plan sera perpendiculaire à la droite (d). Or toute ligne asymptotique qui admet un grand cercle pour représentation sphérique est nécessairement une ligne droite : car les tangentes d'une ligne asymptotique sont perpendiculaires à celles de sa représentation sphérique; et, par conséquent, elles seront ici toutes perpendiculaires au plan du grand cercle. Ainsi cette portion du contour de la surface trouvée (M) sera une droite, *parallèle à* (d).

Considérons maintenant l'un des intervalles pour lesquels la

portion du contour doit se composer d'une ligne plane située dans un plan (P). D'après la détermination de σ, cette portion du contour aura pour représentation plane une droite parallèle à l'un des axes coordonnés et sera, par conséquent, une ligne de courbure; d'après la valeur attribuée à u, cette ligne de courbure aura pour représentation sphérique un arc du grand cercle dont le plan est parallèle à (P). Donc cette portion du contour de la surface trouvée sera bien une courbe plane située dans un plan que la surface coupera normalement et *qui sera parallèle au plan* (P).

On voit donc que, dans chaque cas particulier, la surface minima obtenue sera limitée par une chaîne composée de droites et de plans, parallèles à ceux qui avaient été choisis *a priori*. Mais ici se présente une seconde question.

274. Les directions des droites et des plans qui composent le contour de la surface obtenue sont bien celles des droites et des plans de la chaîne donnée. Mais la solution ne contient plus qu'une constante arbitraire, celle qui entre en facteur dans σ et qui est toujours réelle (K dans les premiers exemples, H dans le dernier); et, par conséquent, elle ne peut donner que les surfaces limitées par un certain contour ou par tous les contours homothétiques. Or il est évident que deux chaînes, telles que celles considérées par M. Schwarz, ne sont pas nécessairement identiques ou homothétiques dès qu'elles sont composées d'éléments parallèles. Supposons, pour fixer les idées, que le contour ne se compose que de droites dont la direction soit connue. Le théorème des projections donnera seulement trois relations entre les longueurs des côtés. Si le nombre de ceux-ci est supérieur à 4, si l'on a par exemple un hexagone, il y aura une infinité d'hexagones non homothétiques dont les côtés seront parallèles.

On voit donc que les hypothèses faites précédemment sur la surface cherchée sont trop limitatives. Alors même qu'elles pourraient être maintenues dans tous les cas, elles ne donneraient la solution du problème que pour des contours spéciaux. Elles pourront être acceptées et donneront certainement une solution du problème quand la forme de la chaîne sera déterminée par la direction de ses éléments : c'est ce qui a lieu dans tous les exemples précédents; mais, dans le cas où la direction des éléments

ne suffit plus à déterminer les rapports de leurs longueurs, elles seront trop spéciales et ne pourront conduire à des solutions générales. Il faut donc reprendre la solution du problème, examiner la signification des différentes hypothèses que nous avons faites et rechercher celles de ces hypothèses auxquelles il faut renoncer.

275. Nous avons admis que l'intégrale σ ou $\int\sqrt{2\mathcal{F}(u)}\,du$ est une fonction finie et uniforme dans toute l'étendue du segment (M) que l'on veut déterminer. Nous allons voir que, même en excluant le cas où la surface (M) aurait des points singuliers, il faut admettre qu'il peut exister des points particuliers du segment (M) qui seront des points critiques de cette intégrale; en sorte qu'elle cessera d'être uniforme.

Imaginons, par exemple, trois plans, désignés par les numéros d'ordre 1, 2, 3, se coupant suivant une droite (d) et formant ainsi six angles dièdres que nous supposerons égaux entre eux, ayant, par suite, pour valeur commune $\frac{\pi}{3}$. Construisons un segment de droite terminé aux plans 1 et 2. Si l'on prend le symétrique de ce segment par rapport au plan 2, puis les symétriques des deux segments obtenus par rapport aux deux plans 1 et 3, on formera un hexagone gauche doué d'une certaine régularité, admettant la droite (d) pour axe de symétrie ternaire. La surface minima limitée par les côtés de cet hexagone jouira évidemment de la même propriété; elle sera normale en un point μ à la droite (d), qui sera aussi pour elle un axe de symétrie ternaire. Par suite, si l'on porte l'origine des coordonnées au point μ en prenant la droite (d) pour axe des z, il sera impossible que le développement de z suivant les puissances de x et de y commence aux termes du second degré, aucune surface du second degré à courbures opposées n'ayant un axe de symétrie ternaire. Il n'est pas impossible, au contraire, que le développement de z commence aux termes du troisième degré. Le point μ ne cessera pas d'être simple, mais l'équation différentielle des lignes de courbure et celle des lignes asymptotiques s'y présenteront sous une forme indéterminée.

276. Il faut donc considérer ces points pour lesquels l'équation

de la surface rapportée à des axes convenablement choisis prend la forme suivante

$$(20)\qquad z = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n+1}(x, y) + \ldots,$$

$\varphi_i(x, y)$ désignant un polynôme homogène de degré i, et n pouvant être supérieur à 2.

On verra facilement, en prenant les termes de degré moindre dans l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima donnée au nº **176**, que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = 0.$$

En choisissant convenablement l'axe des x, on pourra donc prendre

$$\varphi_n = \frac{a}{n}[(x + yi)^n + (x - yi)^n],$$

a désignant une constante réelle. Posons

$$(21)\qquad x + yi = \xi, \qquad x - yi = \eta;$$

on aura

$$(20\ bis)\qquad z = \frac{a}{n}[\xi^n + \eta^n] + \ldots.$$

Les valeurs de u et de u_1 relatives à l'origine peuvent être supposées nulles. Pour reconnaître comment s'expriment u et $\mathcal{F}(u)$ dans le voisinage de ce point, on peut employer la méthode suivante.

L'une des lignes de longueur nulle passant par l'origine est représentée par les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} \xi = -\displaystyle\int_0^u u^2 \mathcal{F}(u)\, du, \\ \eta = \displaystyle\int_0^u \mathcal{F}(u)\, du, \\ z = \displaystyle\int_0^u u \mathcal{F}(u)\, du. \end{cases}$$

L'équation différentielle de cette ligne est d'ailleurs

$$d\xi\, d\eta + dz^2 = 0$$

ou, en remplaçant $d\xi$, $d\eta$ par leurs valeurs déduites des formules précédentes,

$$u^2 = [-(a\xi^{n-1}+\ldots)u^2 + a\eta^{n-1}+\ldots]^2.$$

On tire de là, ε désignant l'unité positive ou négative,

$$\varepsilon u = -(a\xi^{n-1}+\ldots)u^2 + a\eta^{n-1}+\ldots,$$

ce qui donne pour u une valeur de la forme

(23) $$u = a\varepsilon\eta^{n-1}+\ldots,$$

les termes négligés étant, par rapport à ξ, η, de degré supérieur à $n-1$. Si l'on porte cette valeur de u dans l'équation

(24) $$\frac{d\xi}{d\eta} = -u^2,$$

on aura l'équation différentielle suivante

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -a^2\eta^{2n-2}+\ldots.$$

La valeur de ξ qui satisfait à cette équation et s'annule pour $\eta = 0$ sera, comme on sait, de la forme

(25) $$\xi = \eta^{2n-1}\mathrm{P}(\eta),$$

$\mathrm{P}(\eta)$ désignant, suivant nos conventions, une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de η et *qui ne s'annule pas pour* $\eta = 0$. On déduit de là et de la formule (23)

$$u = \eta^{n-1}\mathrm{P}_1(\eta),$$

$\mathrm{P}_1(\eta)$ ayant la même signification que $\mathrm{P}(\eta)$. En résolvant par rapport à η, on trouvera

(26) $$\eta = u^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{P}_2\left(u^{\frac{1}{n-1}}\right).$$

Si l'on différentie maintenant cette équation, en remplaçant $d\eta$ par sa valeur $\mathcal{F}(u)\,du$, on aura

(27) $$\mathcal{F}(u) = u^{\frac{2-n}{n-1}}\mathrm{P}_3\left(u^{\frac{1}{n-1}}\right).$$

Telle est la forme de $\mathcal{F}(u)$ qui convient au point considéré; et il

est aisé de démontrer que, réciproquement, toute valeur de cette forme donne un point simple pour lequel le développement de z a la forme (20).

Faisons en effet

$$u = v^{n-1},$$

les formules du n° 191 qui définissent la surface deviendront ici

$$(28)\quad \begin{cases} x = (n-1)\mathcal{R}\displaystyle\int_0^v (1 - v^{2n-2})\mathrm{P}_3(v)\,dv, \\ y = (n-1)\mathcal{R}\displaystyle\int_0^v i(1 + v^{2n-2})\mathrm{P}_3(v)\,dv, \\ z = (n-1)\mathcal{R}\displaystyle\int_0^v 2v^{n-1}\mathrm{P}_3(v)\,dv. \end{cases}$$

Comme $\mathrm{P}_3(v)$ contient un terme constant, les valeurs de x et de y sont du premier degré par rapport à v et à sa conjuguée v_1. On peut toujours les résoudre par rapport à v et à v_1 et porter les valeurs obtenues dans z; les premiers termes de z seront bien du degré n en x et en y.

277. Imaginons maintenant que l'on ait représenté la surface cherchée (M) sur la moitié supérieure du plan [1]. Soit t la variable complexe représentée sur la moitié supérieure du plan et soit a la valeur de t relative au point considéré de (M). Les coordonnées x et y de ce point seront développables suivant les puissances de $t-a$ et de la quantité conjuguée $t_1 - a_1$; et elles contiendront nécessairement les premières puissances de ces deux quantités. D'ailleurs, comme la variable v qui figure dans les formules (28) est le paramètre d'une ligne de longueur nulle, elle

---

[1] Étant donnée une portion de surface quelconque (M) à connexion simple, peut-on la représenter sur la partie supérieure du plan? La proposition qui résulte d'une réponse affirmative à cette question n'a pas encore été établie; mais nous croyons, avec M. Klein, que les recherches récentes relatives au principe de Dirichlet pourraient, sans trop de longueurs, en fournir une démonstration rigoureuse. Dans le cas des surfaces minima, elle a été énoncée dans les articles si souvent cités de M. Weierstrass, et l'on pourrait la faire dériver de l'existence et des propriétés de la représentation sphérique de la surface. Pour abréger, nous l'admettrons ici.

sera fonction soit de t, soit de t_1. En échangeant, si cela est nécessaire, la partie inférieure et la partie supérieure du plan, on peut toujours supposer v fonction de t. Cela posé, il faudra que, des deux intégrales

$$\int_0^v P_3(v)\,dv, \quad \int_0^v v^{2n-2} P_3(v)\,dv,$$

qui entrent dans les expressions de x et de y et qui sont développables suivant les puissances de $t-a$, l'une contienne la première puissance de cette quantité. Ce sera évidemment celle qui est du degré le moins élevé, et l'on pourra poser

$$\int_0^v P_3(v)\,dv = (t-a)\,P(t-a).$$

En intégrant par rapport à v et en résolvant, on déduira de cette équation la valeur suivante de v

$$v = (t-a)\,P_1(t-a),$$

ou, en remplaçant v par sa valeur en fonction de u,

$$(29) \qquad u = (t-a)^{n-1} P_2(t-a).$$

Comme on connaît déjà l'expression (27) de $\mathcal{F}(u)$ en u, on conclura de l'équation précédente

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{du}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2\,\mathcal{F}(u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

ou, en substituant,

$$(30) \qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (t-a)^{n-2} P_3(t-a).$$

Telles sont les deux formules qui permettent de déterminer la forme de u et de σ dans le voisinage du point $t = a$. Il nous reste à indiquer les propriétés géométriques qui en résultent, et pour la représentation sphérique (S), et pour la représentation plane (Σ).

278. Désignons par α le point de (M) qui correspond à la valeur a de t et par α' sa représentation sur la sphère; soient μ un point de la surface, très voisin de α, et μ' le point correspondant

de la sphère. Lorsque le point μ décrit un petit cercle autour de α, l'argument de $t - a$ augmente de 2π. D'après la formule (29) l'argument de u augmentera de $2(n-1)\pi$ et, par conséquent, le point μ' fera $n - 1$ tours autour de α'. On voit que le point α' sera un point de ramification, d'ordre $n - 2$, de la surface de Riemann qui forme la représentation sphérique de (M). Aussi, dans la suite, donnerons-nous aux points tels que α le nom de *points de ramification d'ordre* $n - 2$ (¹). Si le point α se trouve sur le contour de (M), le point μ de la surface, situé dans l'intérieur de l'aire, ne pourra faire qu'un demi-tour autour de α, et cela quand on passera de la partie du contour qui précède α à celle qui le suit. Alors le point correspondant de la sphère fera seulement $n - 1$ demi-tours.

Supposons d'abord n égal à 3 ou, plus généralement, n impair. Lorsque le point μ parcourt cette portion du contour qui est voisine de α, le point μ' parcourt un arc de grand cercle passant par le point correspondant α'. Si le point μ décrit à l'intérieur de (M) un demi-cercle, en passant de la partie du contour qui précède α à celle qui le suit, le point μ' décrira un nombre entier de tours, et reviendra, par conséquent, sur la partie de l'arc de cercle qui précède α'. Il y aura donc un *rebroussement* dans le mouvement de μ' sur l'arc de cercle. Si la portion considérée du contour de (M) est rectiligne, cela signifie que la normale à la surface, après avoir tourné dans un sens bien déterminé et toujours le même autour de la droite, commencera à tourner en sens contraire. Si cette partie du contour est une ligne de courbure plane, le mouvement de la tangente changera de sens et l'on passera par un point d'inflexion.

Supposons, au contraire, n pair; il y aura un simple *stationnement* dans la rotation de la normale si le contour est rectiligne, et un *sommet* de la courbe si le contour est une ligne de courbure plane.

279. Relativement à la représentation plane (Σ) définie par la

---

(¹) Riemann s'est borné à considérer le cas où $n = 3$, en indiquant que les points les plus généraux peuvent être formés par la réunion de plusieurs de ces points particuliers.

fonction σ, on peut obtenir des conclusions tout aussi précises.

Si n est impair et si le point α est dans l'intérieur de l'aire, on aura, d'après la formule (30), un point critique $t = a$ pour l'intégrale σ. Par conséquent, cette intégrale sera multiforme, et la représentation plane se composera d'une série de portions se reproduisant périodiquement. On voit ainsi que *l'hypothèse d'une représentation plane parfaitement limitée ne saurait convenir à tous les cas*. Si le point α est sur le contour de l'aire, la fonction σ cessera d'être multiforme, mais son argument augmentera de $\pi\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ lorsque t passera par la valeur a. Par conséquent, la portion du contour de (M) sur laquelle se trouve le point α, au lieu d'être représentée par une seule droite, le sera par deux segments perpendiculaires l'un à l'autre.

Supposons, au contraire, n pair. Si le point α est dans l'intérieur de l'aire, la représentation plane (Σ) admettra un point de ramification d'ordre $\frac{n}{2} - 1$. Si le point α est sur le contour, il y aura simplement un *stationnement* ou un *rebroussement* sur la ligne droite parcourue par le point de (Σ).

280. Il nous reste maintenant à examiner les modifications, d'ailleurs très simples, qu'il faudra faire subir à la méthode générale par laquelle nous avons déterminé les deux fonctions u et σ. Si l'on reprend la suite de raisonnements développée au Chapitre IV du Livre II, et si l'on tient compte des singularités qui résultent pour u et pour σ de la présence des points de ramification, on verra que chaque point de ramification d'ordre $n - 2$ introduira simplement dans $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ le facteur

$$(t - a)^{n-2}(t - a_0)^{n-2}$$

(a_0 étant la quantité conjuguée de a), s'il est situé dans l'intérieur de l'aire, ou le facteur

$$(t - a)^{n-2},$$

s'il est situé sur le contour et si, par conséquent, a est réel. D'ailleurs le degré total de $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ devra toujours être égal à -4

lorsque la valeur $t=\infty$ ne correspondra ni à un sommet, ni à un point de ramification.

Pour déterminer la fonction u, il faudra ajouter à l'expression de $\{u, t\}$, donnée au n° 134, des termes tels que les suivants

$$\frac{1}{2}\frac{1-(n-1)^2}{(t-a)^2}+\frac{h}{t-a}+\frac{1}{2}\frac{1-(n-1)^2}{(t-a_0)^2}+\frac{h_0}{t-a_0},$$

si le point de ramification est dans l'intérieur de (M), et seulement la moitié de ces termes

$$\frac{1}{2}\frac{1-(n-1)^2}{(t-a)^2}+\frac{h}{t-a},$$

si le point se trouve sur le contour. Quant aux angles du polygone sphérique et aux valeurs de n, on les déterminera dans chaque cas en se faisant une idée de la forme de la surface cherchée, c'est-à-dire en résolvant, pour éviter des tâtonnements, un problème plus ou moins difficile de géométrie de situation. On pourra étudier à ce point de vue l'exemple donné au n° 275 : si l'on veut déterminer la représentation sphérique de la surface, on peut hésiter entre deux hexagones; mais on reconnaît aisément, et de différentes manières, qu'il faut choisir celui qui fait deux fois le tour de la sphère.

Nous ne développerons pas davantage la méthode précédente qui présente encore des lacunes et qu'il n'est nécessaire d'employer que pour un seul des exemples traités par Riemann, le troisième de ceux qui sont signalés au n° 262. Dans le Chapitre suivant, nous allons proposer une autre solution, qui se rapproche peut-être de celle de M. Weierstrass, et qui repose dans tous les cas sur de belles formules dues à cet illustre géomètre.

CHAPITRE XI.

LES FORMULES DE M. WEIERSTRASS.

Forme nouvelle, due à M. Weierstrass, sous laquelle on peut mettre les équations qui définissent une surface minima. — Formules relatives à une transformation de coordonnées ou à un déplacement de la surface. — Équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les deux fonctions G et H. — Définition d'une *famille* de surfaces minima. — Application à la détermination de la surface minima passant par un contour donné. — Formation de l'équation linéaire correspondante à cette surface. — Indication des questions qui resteront à résoudre après la formation de cette équation. — Propriétés géométriques de la famille de surfaces minima définie par cette équation.

281. Reprenons les équations du n° 191

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \Re\int(1-u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du,\\ y &= \Re\int i(1+u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du,\\ z &= \Re\int 2u\,\mathcal{F}(u)\,du,\end{aligned}\right.$$

qui définissent une surface minima réelle, et supposons que l'on substitue à la variable indépendante u une fonction quelconque t de u. Si l'on veut étudier, par exemple, une portion limitée de la surface, à connexion simple, et si on la suppose représentée sur la partie supérieure du plan, t pourra être l'affixe du point du plan qui correspond au point de la surface; mais, pour le moment, nous supposerons que la nouvelle variable t ait été choisie d'une manière quelconque. Cela posé, si l'on introduit les notations nouvelles

$$(2)\qquad u = -\frac{G(t)}{H(t)},\qquad \mathcal{F}(u)\,du = -i\,H^2(t)\,dt,$$

les équations (1) prendront la forme suivante

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \mathfrak{R}\int i[G^2(t) - H^2(t)]\,dt, \\ y = \mathfrak{R}\int [G^2(t) + H^2(t)]\,dt, \\ z = \mathfrak{R}\int 2iG(t)H(t)\,dt, \end{cases}$$

qui a été donnée par M. Weierstrass [1].

Des formules (2), qui servent de définition à $H(t)$ et à $G(t)$, on déduit les suivantes

$$(4)\qquad \mathcal{F}(u) = \frac{iH^4}{HG' - GH'}$$

et

$$(4a)\qquad \mathcal{F}(u)\,du^2 = i(HG' - GH')\,dt^2,$$

G' et H' désignant les dérivées de G et de H par rapport à t. Par suite, la fonction σ définie dans le Chapitre précédent aura ici pour expression

$$(5)\qquad \sigma = \int \sqrt{2i(HG' - GH')}\,dt;$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques (n° 197) deviendra

$$(6)\qquad \mathfrak{R}\, i(HG' - GH')\,dt^2 = 0,$$

et celle des lignes de courbure sera, de même,

$$(7)\qquad \mathfrak{R}\,(HG' - GH')\,dt^2 = 0.$$

Nous allons maintenant chercher comment se transforment, avec les notations nouvelles, les équations relatives à un déplacement de la surface ou à un changement d'axes coordonnés.

282. Reprenons les formules, données aux n^{os} **198**, **199**,

$$(8)\qquad u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v}, \qquad \mathcal{G}(v) = \mathcal{F}(u)\,\frac{\delta^2}{(m_0 - n_0 v)^4},$$

---

[1] *Monatsberichte der K. P. Akademie*, p. 612 et suiv.; 1866.

qui définissent le déplacement. On peut écrire la seconde sous la forme

$$(9) \qquad \mathcal{G}(v)\,dv = \frac{\delta}{(m_0 - n_0 v)^2}\,\mathfrak{F}(u)\,du.$$

Si l'on désigne par $G_1(t)$, $H_1(t)$ les valeurs nouvelles de $G(t)$, $H(t)$, c'est-à-dire les valeurs de ces fonctions relatives à la surface déplacée, on aura, d'après la définition même de ces quantités,

$$(10) \qquad v = -\frac{G_1(t)}{H_1(t)}, \qquad \mathcal{G}(v)\,dv = -\,i H_1^2(t)\,dt.$$

En portant ces valeurs dans la première équation (8) et dans l'équation (9), on trouvera

$$\frac{G(t)}{H(t)} = \frac{m G_1(t) - n H_1(t)}{m_0 H_1(t) + n_0 G_1(t)},$$
$$H_1^2(t) = \frac{\delta H^2(t) H_1^2(t)}{[m_0 H_1(t) + n_0 G_1(t)]^2}$$

ou, plus simplement,

$$(11) \qquad \begin{cases} G(t) = \dfrac{m}{\sqrt{\delta}}\,G_1(t) - \dfrac{n}{\sqrt{\delta}}\,H_1(t), \\[2ex] H(t) = \dfrac{n_0}{\sqrt{\delta}}\,G_1(t) + \dfrac{m_0}{\sqrt{\delta}}\,H_1(t), \end{cases}$$

le radical $\sqrt{\delta}$ pouvant être pris, soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$. Ce double signe devait naturellement se présenter; car la forme (3) donnée aux équations qui définissent la surface n'est pas altérée si l'on change à la fois le signe de H et celui de G.

Comme δ désigne, dans les formules précédentes (n° 198), le déterminant

$$m m_0 + n n_0,$$

on voit que *le déterminant de la substitution linéaire définie par les formules* (11) *est toujours égal à l'unité.* De là résulte le théorème suivant :

Un déplacement de la surface minima, ou plutôt un déplacement de la courbe minima définie par les équations

$$(12) \quad x = i\int (G^2 - H^2)\,dt, \qquad y = \int (G^2 + H^2)\,dt, \qquad z = \int 2iGH\,dt,$$

se traduit par une substitution linéaire, au déterminant $+1$, *effectuée sur* $G(t)$ *et* $H(t)$, H_1 *et* G_1 *désignant les nouvelles valeurs de* H *et de* G, *on a*

$$G(t) = \frac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) - \frac{n}{\sqrt{\delta}} H_1(t),$$

$$H(t) = \frac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \frac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t);$$

si le déplacement est réel, m_0 *et* n_0 *sont respectivement les imaginaires conjuguées de* m *et de* n.

283. La proposition si simple que nous venons d'établir conduit immédiatement à une conséquence importante. Formons l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0, \tag{13}$$

qui admet comme solutions particulières les deux fonctions $G(t)$ et $H(t)$; il résulte du théorème précédent que cette équation demeurera la même lorsqu'on déplacera la surface d'une manière quelconque dans l'espace. Il est donc naturel de se proposer la question suivante :

Considérons une équation linéaire du second ordre donnée *a priori,* et prenons pour $G(t)$ et $H(t)$ deux solutions particulières quelconques de cette équation. On aura ainsi une infinité de surfaces minima qui dépendront de quatre constantes arbitraires, pouvant être imaginaires. Nous dirons que ces surfaces forment une même *famille*. Peut-on passer d'une de ces surfaces à toute autre par un simple déplacement? Ou, s'il n'en est pas ainsi, quelles sont les relations géométriques entre les différentes surfaces de la même famille?

Pour répondre à cette question, il suffit de remarquer que l'on passe d'une des surfaces à toute autre de la même famille en effectuant sur G et H la substitution linéaire la plus générale. Or une telle substitution résulte toujours de la composition des deux suivantes

$$G = aG_1, \qquad H = aH_1$$

et

$$G = e^{i\alpha}G_1, \qquad H = e^{i\alpha}H_1,$$

où a et α désignent des quantités réelles, avec une substitution quelconque au déterminant $+1$.

La première de ces trois substitutions définit une transformation homothétique à pôle et à module réel, suivie, si l'on veut, d'une translation. Elle aura donc pour effet de remplacer la surface minima par une surface homothétique.

La seconde définit une transformation homothétique à pôle réel et à module imaginaire; en sorte que les modules des deux transformations appliquées aux deux courbes minima dont la translation engendre la surface sont imaginaires conjugués. Si l'on se reporte au commencement du Chapitre V, on reconnaît immédiatement que les surfaces obtenues sont les surfaces *associées* à la surface primitive. On aura, en particulier, la surface *adjointe* si l'on prend

$$G_1 = \sqrt{i}\,G, \qquad H_1 = \sqrt{i}\,H. \tag{14}$$

Enfin la substitution au déterminant $+1$ définit un déplacement qui est généralement imaginaire.

En réunissant les résultats précédents, nous obtenons la réponse suivante à la question proposée.

Toutes les surfaces réelles d'une même famille se déduisent de l'une d'elles par l'emploi des deux opérations suivantes : transformations homothétiques à pôle réel et à modules imaginaires conjugués, appliquées respectivement aux deux courbes minima dont la translation engendre la surface; déplacements imaginaires conjugués respectivement appliqués à ces deux courbes. La première de ces opérations donne les surfaces homothétiques des surfaces *associées* à la proposée. Quant à la seconde, elle n'a pas encore été étudiée avec tout le soin qu'elle paraît mériter. En général, l'étude des surfaces minima qui correspondent à une même équation linéaire du second ordre présenterait, au point de vue analytique aussi bien qu'au point de vue géométrique, un très grand intérêt.

284. Nous venons de voir qu'un déplacement de la surface se traduit par une substitution linéaire, au déterminant $+1$, effectuée sur G et H; on reconnaît aisément que l'opération plus complexe par laquelle, après avoir déplacé la surface, on prend sa symétrique

par rapport à un plan, se traduit de même par la substitution, au déterminant -1,

$$(15)\quad \begin{cases} G(t) = \dfrac{m}{\sqrt{\delta}} G_1(t) + \dfrac{n}{\sqrt{\delta}} H_1(t), \\ H(t) = \dfrac{n_0}{\sqrt{\delta}} G_1(t) - \dfrac{m_0}{\sqrt{\delta}} H_1(t), \end{cases}$$

où m_0, n_0 sont les conjuguées de m et de n quand la transformation est réelle.

Pour obtenir, en effet, par rapport à un plan donné (P), la symétrique (F_1) d'une figure (F) que l'on a déplacée d'abord d'une manière quelconque, on peut évidemment prendre la symétrique (F′) de (F) par rapport à un plan particulier et soumettre ensuite (F′) à un déplacement convenablement choisi. Or, si l'on effectue ici la transformation

$$G(t) = G_2(t), \qquad H(t) = -H_2(t),$$

la coordonnée z de la surface change seule de signe, et cette surface est remplacée par sa symétrique relativement au plan des xy. Si l'on applique ensuite à G_2 et à H_2 les transformations qui caractérisent un déplacement réel, on obtient effectivement la substitution, de déterminant -1, définie par les formules (15).

Nous aurons à employer dans la suite les formes canoniques des substitutions linéaires (11) et (15); on les obtient sans difficulté de la manière suivante.

Nous avons déjà remarqué que, si l'on considère la rotation définie par la substitution linéaire

$$u = \frac{mv + n}{m_0 - n_0 v}$$

et si l'on prend pour axe des z l'axe de cette rotation, on doit faire

$$n = n_0 = 0, \qquad m = e^{-i\frac{\alpha}{2}}, \qquad m_0 = e^{+i\frac{\alpha}{2}},$$

α désignant l'angle de la rotation. Si l'on introduit ces hypothèses dans les formules (11) et (15), on trouvera

$$(11_a)\quad \begin{cases} G(t) = \varepsilon e^{-i\frac{\alpha}{2}} G_1(t), \\ H(t) = \varepsilon e^{i\frac{\alpha}{2}} \; H_1(t), \end{cases}$$

pour la forme canonique de la substitution (11), et

$$(15_a) \qquad \begin{cases} G(t) = \quad \varepsilon e^{-i\frac{\alpha}{2}} G_1(t), \\ H(t) = -\varepsilon e^{i\frac{\alpha}{2}} \quad H_1(t), \end{cases}$$

pour la forme canonique de la substitution (15). Dans ces deux systèmes de formules, ε désigne l'unité positive ou négative. Les dernières mettent en évidence le théorème suivant, auquel on parvient aussi par la Géométrie : Tout déplacement suivi d'une transformation par symétrie relative à un plan quelconque équivaut à une rotation d'angle fini autour d'une droite, suivie d'une transformation par symétrie relative à un plan perpendiculaire à la droite.

285. Nous allons appliquer les remarques précédentes à la résolution du problème étudié dans le Chapitre précédent, c'est-à-dire à la détermination du segment de surface minima (M) limité par la chaîne de plans et de droites qui a été déjà définie; mais nous présenterons d'abord la remarque suivante, qui simplifiera la solution.

Imaginons le segment de surface (N), *adjoint* à (M), et cherchons comment il sera limité. D'après les propriétés données au Chapitre V (n° **211**), les plans tangents aux points correspondants des deux segments seront parallèles, et deux éléments correspondants seront toujours perpendiculaires. Il suit de là qu'à une droite (d) limitant (M) correspondra nécessairement sur (N) une courbe) dont les tangentes seront perpendiculaires à la droite. La courbe (C) sera donc située dans un plan (P) perpendiculaire à la droite; et le plan tangent à (N) en chaque point de cette courbe sera nécessairement parallèle à la droite (d), c'est-à-dire perpendiculaire au plan (P). Ainsi, à chaque droite (d), limite de (M), correspond une courbe plane (C), limite de (N); et cette courbe est située dans un plan que la surface doit couper normalement.

On démontrera tout aussi facilement qu'à chaque courbe plane, limite de (M), correspond une droite, limite de (N); et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Le segment adjoint (N) *est limité par une chaîne toute pa-*

reille à celle qui limite (M); *deux éléments correspondants des deux chaînes sont toujours d'espèce différente et sont perpendiculaires l'un à l'autre.*

Cela posé, considérons la représentation conforme du segment (M) sur la partie supérieure du plan; et prenons maintenant pour t la variable complexe qui réalise cette transformation, c'est-à-dire l'affixe du point de la partie supérieure du plan qui correspond au point de la surface; $G(t)$ et $H(t)$ seront alors des fonctions qu'il faudra déterminer, au moins pour toutes les valeurs de t dont la partie imaginaire est positive. Nous avons vu que, si l'on passe au segment adjoint (N), il faut les multiplier l'une et l'autre par $\sqrt{i}$.

Formons l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+p\frac{d\theta}{dt}+q\theta=0, \tag{16}$$

à laquelle satisfont G et H. Les coefficients p et q sont des fonctions de t déterminées par les formules

$$p=-\frac{GH''-HG''}{GH'-HG'},\qquad q=\frac{G'H''-H'G''}{GH'-HG'}. \tag{17}$$

D'après les remarques précédentes, ces fonctions nouvelles ne changent pas lorsqu'on déplace la surface (M), ou lorsqu'on la remplace par son adjointe. Ces propriétés sont très importantes au point de vue de la question que nous avons à résoudre; elles permettent de substituer, avec de grands avantages, l'étude des fonctions p et q à celle de G et de H; on pourra, en effet, dans l'étude de p et de q, orienter le contour donné de la manière qui sera le plus commode, ou encore substituer au segment (M) le segment adjoint (N).

286. Prenons d'abord un point à l'intérieur de (M), correspondant à une valeur imaginaire a de t. On peut choisir ce point pour origine et prendre pour axe des z la normale en ce point; les coordonnées x, y, z d'un point voisin de la surface seront développables suivant les puissances de $t-a$ et de la quantité conjuguée t_1-a_1; et les premières puissances de ces deux binômes

devront apparaître dans l'un au moins de ces développements. Par suite, les trois intégrales

$$\int_a^t G^2(t)\,dt, \quad \int_a^t G(t)\,H(t)\,dt, \quad \int_a^t H^2(t)\,dt$$

seront développables suivant les puissances entières de $t-a$, et l'un des deux développements au moins devra contenir la première puissance de $t-a$. Comme la variable u doit être nulle ou infinie à l'origine, d'après la direction attribuée à l'axe des z, il résulte de l'expression (2) de u que l'une des fonctions $G(t)$, $H(t)$ sera infiniment petite par rapport à l'autre. Soit, pour fixer les idées, $H(t)$ celle dont le degré est le moins élevé. La dernière des trois intégrales précédentes sera celle qui aura le moindre degré et qui contiendra, par conséquent, la première puissance de $t-a$. On pourra donc écrire

$$\int_a^t H^2(t)\,dt = (t-a)\,P(t-a),$$

ou, en différentiant,

$$H(t) = P(t-a), \tag{18}$$

P ayant la signification que nous lui avons toujours donnée, c'est-à-dire représentant une série ordonnée suivant les puissances positives de $t-a$ et ne s'annulant pas pour $t=a$.

Quant à $G(t)$, il sera déterminé par la formule

$$\int_a^t G(t)\,H(t)\,dt = (t-a)^n\,P(t-a);$$

d'où l'on déduira, par la différentiation et la substitution de la valeur de H,

$$G(t) = (t-a)^{n-1}\,P(t-a), \tag{18$_a$}$$

n étant un nombre entier au moins égal à 2.

D'après ces développements, on voit que le point $t=a$ est nécessairement un point ordinaire de l'équation linéaire toutes les fois que n est égal à 2. Si n est égal ou supérieur à 3, ce sera au contraire un point *à apparence singulière*. Le point correspondant du segment (M) sera alors un de ceux auxquels nous

avons donné (nº 278) le nom de *points de ramification*. En réunissant les deux cas, nous pouvons énoncer cette première proposition :

L'équation linéaire n'aura que des points ordinaires ou des points à apparence singulière pour toutes les valeurs de t qui sont représentées par des points de la partie supérieure du plan.

Si, des expressions de G et de H, on déduit celles de p et de q, on trouvera

$$(19) \quad \begin{cases} p = -\dfrac{n-2}{t-a} + A + B(t-a) + \ldots, \\ q = \quad \dfrac{h}{t-a} + \ldots, \end{cases}$$

les coefficients h, A, B, ... pouvant être nuls. On aura de même, en substituant les valeurs de G et de H dans les équations (2) et (5),

$$(19_a) \quad u = (t-a)^{n-1}\,P(t-a), \qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (t-a)^{n-2}\,P(t-a).$$

287. Examinons maintenant les points situés sur le contour de (M), et supposons d'abord que la portion du contour considérée soit une droite (d). Choisissons les axes de telle manière que (d) soit parallèle à l'axe des y. Si l'on se déplace sur la droite, t prendra des valeurs réelles comprises entre les deux valeurs a_k, a_{k+1} qui correspondent aux deux sommets du contour situés sur (d), et les différentielles dx, dz devront être nulles. On sera ainsi conduit aux deux équations

$$\mathcal{R}\, i(G^2 - H^2) = 0, \qquad \mathcal{R}\, iGH = 0,$$

ou, en désignant par G_1 et H_1 les imaginaires conjuguées de G et de H,

$$G^2 - H^2 = G_1^2 - H_1^2,$$
$$GH = G_1 H_1.$$

On déduit de là l'un des systèmes

$$\begin{cases} G = \varepsilon G_1, \\ H = \varepsilon H_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} G = -\varepsilon i H_1, \\ H = \quad \varepsilon i G_1. \end{cases}$$

où ε désigne l'unité, positive ou négative. Le second doit être écarté ; car il conduirait à l'équation impossible

$$GG_1 + HH_1 = 0,$$

et d'ailleurs il donnerait $dy = 0$. Il reste donc seulement le premier, d'où l'on conclut que les quantités

$$e^{\frac{(1-\varepsilon)i\pi}{4}} G, \qquad e^{\frac{(1-\varepsilon)i\pi}{4}} H$$

sont égales à leurs conjuguées *et sont, par conséquent, réelles.*

Ainsi l'équation linéaire doit admettre, pour toutes les valeurs réelles de t comprises entre a_k et a_{k+1}, deux solutions particulières réelles.

La même conclusion a lieu lorsque la partie considérée du contour est une des courbes planes situées dans les plans que la surface doit couper normalement ; car il suffit alors (n° 285), pour retrouver le cas précédent, de passer à la surface adjointe et de remplacer G, H par $G\sqrt{i}$, $H\sqrt{i}$. On est ainsi conduit à la règle suivante :

Si la portion considérée du contour est une droite, supposons que l'axe des y ait été choisi parallèle à cette droite ; si elle est une courbe plane, supposons que l'axe des y soit perpendiculaire au plan de cette courbe ; et soient $G(t)$, $H(t)$ les solutions particulières relatives à cette position des axes coordonnés. *Les intégrales*

$$e^{ni\frac{\pi}{4}} G(t), \qquad e^{ni\frac{\pi}{4}} H(t)$$

seront réelles sur toute la partie considérée du contour, n étant un nombre entier, qui sera pair si la portion du contour est rectiligne et impair si elle est simplement plane.

Il suit de là que, si l'on considère une chaîne composée de s éléments et si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_s$ les valeurs de t relatives aux divers sommets de cette chaîne, l'équation linéaire admettra deux solutions particulières réelles pour chacun des intervalles $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3)$, $\ldots$, $(a_{s-1} a_s)$, $(a_s \infty a_1)$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de t. Donc *les fonctions p et q de la variable t seront nécessairement réelles pour toutes les valeurs réelles de t.*

288. On peut déduire des résultats précédents d'autres conséquences en adoptant la méthode de prolongement analytique due à Riemann et à M. Schwarz et développée au n° **130**. Nous avons vu que, si une fonction est déterminée pour la partie supérieure du plan et si elle est réelle pour des valeurs réelles de t, elle peut être définie pour la partie inférieure du plan par la convention que les valeurs de la fonction relatives à deux valeurs imaginaires conjuguées de t soient elles-mêmes imaginaires conjuguées.

Appliquons cette méthode aux deux intégrales

$$e^{ni\frac{\pi}{4}}G(t), \qquad e^{ni\frac{\pi}{4}}H(t),$$

qui ont été reconnues réelles; mais supposons que l'on passe de la partie supérieure à la partie inférieure du plan, seulement en franchissant la portion de l'axe réel qui est comprise entre les deux points a_k, a_{k+1} et qui correspond à la portion spécialement considérée du contour. Nous allons montrer que le prolongement analytique des deux intégrales donne un segment de surface minima (M_k^0) qui est précisément le symétrique de (M) par rapport à la droite ou au plan de la chaîne; de plus, deux points des deux segments placés symétriquement par rapport à l'élément de la chaîne correspondent à des valeurs imaginaires conjuguées de t. Pour plus de netteté, supposons que cet élément de la chaîne soit une droite; alors on pourra poser

$$G(t) = e^{-\frac{ni\pi}{2}} g(t),$$
$$H(t) = e^{-\frac{ni\pi}{2}} h(t),$$

g et h étant réelles pour des valeurs réelles de t et n étant entier.

Le segment de surface qui correspond aux valeurs t_1 de t représentées dans la partie inférieure du plan sera défini par les formules

$$(20)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\int(-1)^n i[g^2(t_1) - h^2(t_1)]\,dt_1, \\ y = \mathcal{R}\int(-1)^n[g^2(t_1) + h^2(t_1)]\,dt_1, \\ z = \mathcal{R}\int(-1)^n 2ig(t_1)h(t_1)\,dt_1. \end{cases}$$

Si l'on change i en $-i$ dans les expressions soumises au signe

$\mathcal{R}$, ce qui ne change pas les parties réelles, on a

$$(21)\qquad \begin{cases} x = \mathcal{R}\int(-1)^{n+1}i[g^2(t) - h^2(t)]\,dt, \\ y = \mathcal{R}\int(-1)^n[g^2(t) + h^2(t)]\,dt, \\ z = \mathcal{R}\int(-1)^{n+1}2ig(t)h(t)\,dt. \end{cases}$$

Ce sont les formules qui conviennent au segment (M), mais où l'on aurait changé le signe de x et de z. On obtient donc, comme nous l'avons annoncé, le segment symétrique de (M) par rapport à la droite considérée du contour.

Les intégrales $g(t)$, $h(t)$ de l'équation différentielle étant des fonctions linéaires connues des deux intégrales qui correspondent à une position déterminée, toujours la même, de (M) par rapport aux axes, on voit que ces deux intégrales peuvent être prolongées analytiquement; mais il y aura autant de prolongements analytiques qu'il y a d'éléments au contour. Si l'on passe de la partie supérieure du plan à la partie inférieure en traversant le segment $a_1 a_2$ de l'axe réel, on obtiendra un segment (M_1^0) symétrique de (M) par rapport au premier élément de la chaîne qui détermine le contour; si l'on traverse le segment $a_2 a_3$, on obtiendra le segment (M_2^0) symétrique de (M) par rapport au second élément de la chaîne, et ainsi de suite; si l'on traverse enfin le dernier segment $a_s \infty a_1$, on aura le segment (M_s^0) symétrique de (M) par rapport au $s^{\text{ième}}$ et dernier élément du contour. Dans tous ces segments, le point symétrique d'un même point de (M) correspond à une même valeur t_1 de t, et cette valeur est imaginaire conjuguée de celle qui définit le point de (M).

On obtient ainsi s prolongements analytiques différents des fontions $G(t)$, $H(t)$; mais, comme ces prolongements donnent des segments tous symétriques de (M) et qui peuvent, par conséquent, se déduire les uns des autres, soit par des déplacements, soit par des déplacements suivis d'une transformation par symétrie relative à un plan, on doit conclure de la proposition du n° **282** que les divers systèmes de valeurs de G et de H ainsi définis s'obtiendront en combinant linéairement les va-

leurs de G et de H relatives à l'un quelconque d'entre eux ([1]).

Par suite, l'équation linéaire (16) demeurera la même pour tous ces segments, ou, ce qui est la même chose, les fonctions p et q ne peuvent être prolongées analytiquement que d'une seule manière. En d'autres termes, *les fonctions p et q doivent être uniformes dans toute l'étendue du plan.* Elles sont réelles pour des valeurs réelles de t, et prennent des valeurs imaginaires conjuguées lorsqu'on substitue à t des valeurs imaginaires conjuguées. Comme, d'après les propriétés du prolongement analytique (n° 130), les fonctions G et H ne cessent pas d'être développables en séries entières pour les différents points du contour qui ne sont pas des sommets, on voit qu'en dehors de ces sommets l'équation linéaire ne peut avoir que des points ordinaires, ou des points à apparence singulière; et même, si l'on exclut l'hypothèse de points multiples de la surface situés sur le contour, une des intégrales particulières devra rester finie pour chacun de ces points.

En résumé, *l'équation linéaire dont dépend la solution du problème doit avoir ses coefficients uniformes dans toute l'étendue du plan, et réels pour des valeurs réelles de t. Si l'on exclut les valeurs* $t = a_k$ *qui correspondent aux sommets du contour, elle ne peut avoir que des points à apparence singulière pour lesquels une des deux intégrales particulières demeure finie et différente de zéro.*

([1]) S'il subsistait un doute sur ce point, on pourrait le lever de la manière suivante :

Nous avons vu que, pour chacun des intervalles $(a_k a_{k+1})$, il existe deux intégrales de l'équation linéaire qui sont réelles pour les valeurs réelles de t comprises dans l'intervalle et qui, par suite, prennent des valeurs imaginaires conjuguées pour des valeurs imaginaires conjuguées de t lorsqu'on les prolonge à travers l'intervalle $(a_k a_{k+1})$.

Il suit de là que l'on peut prolonger analytiquement deux intégrales quelconques de l'équation linéaire, et cela d'autant de manières qu'il y a d'intervalles différents. Chacun de ces prolongements donnera évidemment pour $G(t_1)$ et $H(t_1)$, t_1 étant imaginaire conjuguée de t_1, des fonctions linéaires

$$aG_1 + bH_1, \quad a'G_1 + b'H_1$$

des quantités G_1 et H_1 qui sont les imaginaires conjuguées de $G(t)$, $H(t)$. Par suite, les différents systèmes de valeurs de $G(t_1)$, $H(t_1)$ s'obtiendront en combinant linéairement l'un quelconque d'entre eux.

Les points à apparence singulière pourront être réels ; mais, s'ils sont imaginaires, ils seront placés symétriquement par rapport à l'axe réel.

289. Si le point correspondant à la valeur ∞ de t n'est pas un des sommets de la chaîne qui limite le contour, il est aisé de reconnaître quelle sera la forme de p et q dans le domaine de l'infini. Il suffit, pour cela, de faire la remarque suivante :

Soient t une variable quelconque et $G(t)$, $H(t)$ les deux fonctions qui déterminent la surface minima ; si l'on substitue à t une nouvelle variable t', les nouvelles valeurs de G et de H seront

$$G\sqrt{\frac{dt}{dt'}}, \quad H\sqrt{\frac{dt}{dt'}}.$$

D'après cela, si nous désignons par α une valeur réelle de t qui détermine un point ordinaire de l'équation différentielle, cette équation admettra deux solutions de la forme

$$P(t-\alpha), \quad (t-\alpha)P_1(t-\alpha);$$

si l'on effectue la substitution réelle

$$t-\alpha = \frac{1}{t'}$$

et si l'on applique la règle que nous venons d'énoncer, on trouvera les deux solutions

$$\frac{1}{t'}P\left(\frac{1}{t'}\right), \quad \frac{1}{t'^2}P_1\left(\frac{1}{t'}\right),$$

qui caractérisent le cas où le point $t=\infty$ n'est ni un sommet du contour, ni un point à apparence singulière. En portant ces deux solutions dans les formules (17), on trouvera, pour les valeurs de p et de q,

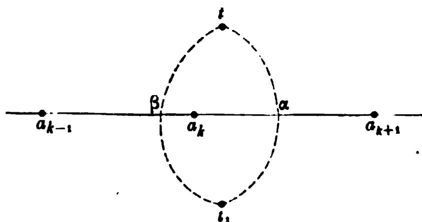
$$(22) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{4}{t} + \dfrac{A}{t^2} + \ldots, \\ q = \dfrac{2}{t^2} + \dfrac{A}{t^3} + \ldots. \end{cases}$$

Il faut remarquer l'égalité des coefficients de $\frac{1}{t^2}$ dans p et de $\frac{1}{t^3}$ dans q.

290. Il reste donc, pour terminer cette discussion, à examiner quelle est la forme des intégrales G, H et des coefficients p, q dans le voisinage des valeurs $t = a_k$ qui correspondent aux sommets de la chaîne. On peut employer pour cela deux méthodes différentes. Voici la première :

Soit (*fig.* 24) t un point compris dans la partie supérieure du plan, auquel correspond un point m de (M); soit t_1 le point symétrique de t par rapport à l'axe réel. Si l'on passe de t à t_1 par

Fig. 24.



le chemin $t\alpha t_1$ qui coupe l'axe entre a_k et a_{k+1}, on doit passer, sur la surface, du point m au point m_1 qui est l'homologue ou le symétrique de m dans le segment (M_k^0). Si, au contraire, on suit le chemin $t\beta t_1$ qui coupe l'axe réel entre a_{k-1} et a_k, on obtiendra le point m_2 symétrique de m dans le segment (M_{k-1}^0). Il suit de là que le lacet $t_1\beta t\alpha t_1$ effectuera sur les deux intégrales particulières relatives au segment (M_{k-1}^0) précisément la substitution linéaire par laquelle on passe de ce segment au suivant (M_k^0).

Les deux formes canoniques de cette substitution ont été données au n° **284**. Elles sont contenues dans les deux systèmes suivants

$$(23)\qquad \begin{cases} G(t) = e^{-i\alpha\pi} G_1(t), \\ H(t) = e^{i\alpha\pi} H_1(t), \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} G(t) = e^{-i\alpha\pi} G_1(t), \\ H(t) = -e^{i\alpha\pi} H_1(t), \end{cases}$$

qui conviennent, le premier au cas où les deux éléments du contour qui se croisent au sommet a_k sont de même espèce, le second au cas où ces éléments sont d'espèce différente. On déduit immédiatement de là qu'il existe, pour le point critique a_k, deux inté-

grales G et H telles que les produits

$$(t-a_k)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{G},\quad (t-a_k)^{-\frac{\alpha}{2}}\mathrm{H}$$

pour le premier cas, et

$$(t-a_k)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{G},\quad (t-a_k)^{\frac{1-\alpha}{2}}\mathrm{H}$$

pour le second, soient des fonctions uniformes dans le domaine du point a_k.

Comme les quadratures

$$\int \mathrm{G}^2\,dt,\quad \int \mathrm{GH}\,dt,\quad \int \mathrm{H}^2\,dt,$$

qui entrent dans les équations par lesquelles se détermine la surface, ne peuvent devenir infinies ou indéterminées dans le voisinage de la valeur a_k, il est inadmissible que les fonctions uniformes auxquelles nous sommes conduits admettent le point a_k comme point singulier essentiel. Ce point ne peut être qu'un pôle et, par suite, *l'équation linéaire devra admettre deux intégrales régulières à exposants réels*. On voit même que la somme des exposants de ces deux intégrales sera un nombre entier ou la moitié d'un nombre impair, suivant que les éléments du contour qui se réunissent au sommet considéré sont de même espèce ou d'espèce différente.

291. On peut encore établir tous ces résultats en utilisant les deux représentations conformes de (M). Supposons seulement que la portion de (M) infiniment voisine du sommet a_k ait une représentation sphérique (S) et une représentation plane (Σ) parfaitement définies. Alors, en suivant la marche indiquée aux nos 131 et 133 et appliquée déjà dans le Chapitre précédent, on reconnaît qu'avec des axes convenablement choisis la valeur de u, dans le voisinage du point $t=a_k$, est

$$u=(t-a_k)^{\alpha_k}\,\mathrm{P}(t-a_k),$$

$\alpha_k\pi$ étant l'angle dont il faut faire tourner l'un des côtés du contour dans la représentation sphérique (S) pour l'appliquer sur le suivant, en restant toujours dans la surface de Riemann qui sert de représentation sphérique à (M). De même, dans la représenta-

tion plane (Σ) définie au Chapitre précédent, il faudra faire tourner l'un des côtés du contour d'un angle $n\frac{\pi}{4}$ pour l'appliquer sur le suivant; n sera pair si les deux éléments consécutifs sont de même espèce, c'est-à-dire si les portions du contour qui se réunissent au sommet sont toutes deux des droites ou toutes deux des lignes de courbure planes; il sera impair dans le cas contraire. On aura donc

$$\sigma = (t - a_k)^{\frac{n}{4}} P(t - a_k).$$

Ces deux valeurs de u et de σ permettent de déterminer deux intégrales particulières $G(t)$ et $H(t)$. On déduit en effet des formules (2) et (5) les valeurs suivantes

$$(25) \qquad G = -\sqrt{\frac{i}{2}} \frac{u\,d\sigma}{\sqrt{du\,dt}}, \qquad H = \sqrt{\frac{i}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{du\,dt}}$$

de G et de H. En y portant les développements en série obtenus pour σ et pour u, on trouve les expressions

$$G = (t - a_k)^{\frac{n-2}{4} + \frac{\alpha_k}{2}} P\,(t - a_k),$$
$$H = (t - a_k)^{\frac{n-2}{4} - \frac{\alpha_k}{2}} P_1(t - a_k),$$

qui mettent en évidence la forme régulière de G et de H. Il sera plus commode d'écrire par la suite

$$(26) \qquad \begin{cases} G = (t - a_k)^{\frac{n_k}{4} + \frac{\alpha_k}{2}} P\,(t - a_k), \\ H = (t - a_k)^{\frac{n_k}{4} - \frac{\alpha_k}{2}} P_1(t - a_k). \end{cases}$$

Le nouveau nombre entier n_k se déterminera d'ailleurs comme l'ancien. Il sera pair si les deux côtés consécutifs du contour sont de même nature : nous dirons alors que le sommet considéré est de *première espèce*. Il sera impair si les deux côtés consécutifs sont de nature différente : nous dirons alors que le sommet est *de seconde espèce*.

Des expressions de G et de H, on déduit par les formules (17)

celles de p et de q. On a ainsi

$$(27)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1 - \dfrac{n_k}{2}}{t - a_k} + A + B(t - a_k) + \ldots, \\ q = \dfrac{\dfrac{n_k^2}{16} - \dfrac{\alpha_k^2}{4}}{(t - a_k)^2} + \dfrac{h_k}{t - a_k} + A_1 + B_1(t - a_k) + \ldots, \end{cases}$$

A, B, h_k, A_1, B_1, ... étant des coefficients qui pourront être nuls, mais sont évidemment réels.

292. Les formules précédentes dépendent de nombres entiers qu'il ne sera pas toujours facile de fixer *a priori*. Nous donnerons plus loin des relations auxquelles ils doivent satisfaire; mais il ne sera pas inutile de montrer comment on peut les déterminer immédiatement lorsqu'on a une idée nette et une vue générale de la surface cherchée.

D'abord α_k sera déterminé sans ambiguïté si l'on aperçoit nettement la représentation sphérique de la surface.

En ce qui concerne n_k, remarquons d'abord que, si le sommet considéré est à distance finie, il faudra que les intégrales

$$\int G^2(t)\,dt, \quad \int H^2(t)\,dt, \quad \int G(t)\,H(t)\,dt$$

demeurent finies pour $t = a_k$. Cela donne la relation d'inégalité

$$\frac{n_k}{2} - \alpha_k + 1 > 0,$$

qui devra toujours être vérifiée.

D'autre part, si l'on néglige les termes de degré supérieur, l'équation de la surface dans le voisinage du point a_k est de la forme

$$(28)\quad \begin{cases} x = \Re\, A\, i(t - a_k)^{\frac{n_k}{2} - \alpha_k + 1}, \\ y = \Re\, A\ (t - a_k)^{\frac{n_k}{2} - \alpha_k + 1}, \\ z = 0, \end{cases}$$

A étant une constante quelconque réelle ou imaginaire. Par conséquent, lorsque la variable t décrira, dans la partie supérieure du plan, un demi-cercle infiniment petit autour du point a_k, le point correspondant de la surface décrira un petit arc de cercle

égal à

$$\pi\left(\frac{n_k}{2}-\alpha_k+1\right)=\alpha'_k\pi.$$

Cet angle est donc celui dont tourne le rayon vecteur qui joint le point de la surface au sommet infiniment voisin quand on passe d'un côté du contour au suivant. Il est évidemment connu si l'on a une idée générale de la forme de la surface; sa valeur suffira à déterminer n_k.

293. Les formes de G, H, p, q étant déterminées dans le voisinage de tous les points du plan, il est aisé maintenant d'obtenir les expressions générales de p et de q. Désignons par la lettre b les valeurs de t qui correspondent aux points à apparence singulière réels et par n', h' les valeurs correspondantes de l'exposant et du coefficient h qui figurent dans les formules (19). Désignons de même par les lettres c, c_1 les valeurs de t imaginaires conjuguées correspondantes aux différents points à apparence singulière qui sont deux à deux imaginaires conjugués, et soient de même n'', h'', h''_1 les valeurs de l'entier n et de la constante h relatives à ces points. D'après les résultats établis plus haut et les formules (19), (27), les deux fonctions

$$p-\sum\frac{1-\frac{n_k}{2}}{t-a_k}-\sum\frac{2-n'}{t-b}-\sum\left(\frac{2-n''}{t-c}+\frac{2-n''}{t-c_1}\right),$$

$$q-\sum\left[\frac{1}{4}\frac{\frac{n_k^2}{4}-\alpha_k^2}{(t-a_k)^2}+\frac{h_k}{t-a_k}\right]-\sum\frac{h'}{t-b}-\sum\left(\frac{h''}{t-c}+\frac{h''_1}{t-c_1}\right)$$

demeureront finies et continues pour toutes les valeurs finies de t; elles deviennent d'ailleurs nulles, d'après les formules (22), pour $t=\infty$. Ces deux fonctions seront donc nulles pour toutes les valeurs de t, et l'on pourra poser

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned}p&=\sum\frac{1-\frac{n_k}{2}}{t-a_k}+\sum\frac{2-n'}{t-b}+\sum\left(\frac{2-n''}{t-c}+\frac{2-n''}{t-c_1}\right),\\ q&=\sum\left[\frac{1}{4}\frac{\frac{n_k^2}{4}-\alpha_k^2}{(t-a_k)^2}+\frac{h_k}{t-a_k}\right]\\ &\quad+\sum\frac{h'}{t-b}+\sum\left(\frac{h''}{t-c}+\frac{h''_1}{t-c_1}\right).\end{aligned}\right.$$

Il faudra de plus, pour que les fonctions p et q admettent la forme (22) dans le domaine de l'infini, que les constantes satisfassent aux équations

$$(30)\quad \begin{cases} \sum\left(1-\frac{n_k}{2}\right)+\sum(2-n')+2\sum(2-n'')=4, \\ \sum h_k+\sum h'+\sum(h''+h''_1)=0, \\ \sum\left[\frac{n_k^2}{16}-\frac{\alpha_k^2}{4}+a_k h_k\right]+\sum bh'+\sum(ch''+c_1 h''_1)=2, \\ \sum\left[\left(\frac{n_k^2}{8}-\frac{\alpha_k^2}{2}\right)a_k+a_k^2 h_k\right]+\sum b^2 h'+\sum(c^2 h''+c_1^2 h''_1) \\ \quad =\sum\left(1-\frac{n_k}{2}\right)a_k+\sum(2-n')b+\sum(2-n'')(c+c_1). \end{cases}$$

Telles sont les relations qui déterminent, autant que possible, l'équation linéaire; il faudra leur ajouter encore, pour chacun des points à apparence singulière, l'équation de condition, d'une formation facile, par laquelle on exprime que l'intégrale générale ne contient pas de logarithmes, dans le voisinage de ce point.

294. L'équation différentielle une fois formée, le problème est loin d'être résolu. Il y a encore à examiner deux questions très essentielles. Reprenons ces segments (M_1^0), (M_2^0), ..., (M_s^0) qui sont les symétriques de (M) par rapport aux divers éléments de la chaîne; et soient, par exemple, $G(t_1)$, $H(t_1)$ les valeurs des intégrales qui correspondent au premier segment. Pour passer de ces valeurs à celles qui correspondent au second segment, il faut suivre un lacet qui, partant du point t_1, pénétrera dans la partie supérieure du plan en passant entre a_1 et a_2, puis reviendra au point de départ en passant entre a_2 et a_3. On reviendra alors au point t_1 et les nouvelles valeurs de G et de H seront des fonctions linéaires des anciennes. Or ces nouvelles valeurs, nous l'avons déjà remarqué, sont connues *a priori*. On les obtiendrait en effectuant sur les intégrales primitives la substitution, au déterminant $+1$ ou -1 suivant les cas, par laquelle on peut passer directement du segment (M_1^0) au segment (M_2^0).

Comme ce raisonnement peut s'appliquer à tous les lacets décrits autour des différents points critiques, nous sommes conduits à la conclusion suivante :

Il ne suffira pas de savoir former l'équation différentielle; il faudra encore exprimer que deux intégrales convenablement choisies subissent des modifications parfaitement déterminées lorsqu'on suit un chemin quelconque ramenant au point de départ.

Ce problème est posé depuis la publication des recherches récentes sur les équations linéaires, et il n'a encore reçu de solution que pour certains cas particuliers.

Quoi qu'il en soit, supposons résolue cette première difficulté. Une énumération de constantes que l'on trouvera dans le Mémoire de Riemann, et que nous omettrons ici, montre facilement que l'on pourra disposer de celles de ces constantes qui demeurent arbitraires pour identifier le contour obtenu avec celui qui est donné *a priori,* c'est-à-dire que l'on aura autant d'équations que d'inconnues. Mais le problème qui consisterait à résoudre ces équations, ou à démontrer au moins qu'elles sont possibles, n'a pas été traité d'une manière générale et n'a été examiné par Riemann que dans un cas particulier, qui sera étudié plus loin au n° **307**. Tous les exemples complètement achevés donnés dans le Chapitre précédent appartiennent, comme nous l'avons remarqué, à la classe de ceux pour lesquels la forme du contour est entièrement définie par la direction des éléments.

295. On peut éclaircir encore les remarques précédentes en supposant donnée *a priori* l'équation linéaire (16), dans laquelle p et q auront les valeurs déterminées par les formules (29), et en étudiant la *famille* de surfaces minima (n° **283**) définie par cette équation. Pour chacune des surfaces de cette famille, il existe un segment (M) correspondant aux valeurs de t dont la partie réelle est positive, segment parfaitement continu et limité par un contour dont la représentation sphérique (S) est formée par des arcs de grand cercle ou de petit cercle, se coupant consécutivement sous des angles déterminés. Cette dernière propriété a été déjà donnée au n° **135** pour une équation linéaire plus générale et résulte uniquement de ce que l'équation admet deux solutions particulières réelles dans chacun des intervalles réels déterminés par les points singuliers. Considérons maintenant la représentation

plane (Σ) définie par la formule

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{d\sigma}{dt} = e^{-\frac{1}{2}\int p\,dt} \\ \quad = \mathrm{C}\prod (t-a_k)^{\frac{n_k}{4}-\frac{1}{2}} \prod (t-b)^{\frac{n'}{2}-1} \prod [(t-c)(t-c_1)]^{\frac{n''}{2}-1}. \end{cases}$$

Les portions du contour qui devraient être des droites ont ici pour représentation des droites (δ), toutes parallèles ou perpendiculaires les unes aux autres; il en est de même pour les portions du contour de (M) qui devraient être des lignes de courbure planes; elles ont pour représentation plane des droites (δ') qui font avec les précédentes (δ) des angles égaux à un multiple impair de $\frac{\pi}{4}$. Si donc on a choisi arbitrairement deux solutions particulières, G et H, de l'équation linéaire, on pourra toujours, en les multipliant par une même constante, ce qui ne change pas leur rapport et ne modifie pas, par conséquent, la représentation sphérique de la surface minima correspondante, donner à la constante C qui figure dans la formule (31) un argument tel que les droites (δ') deviennent, toutes, parallèles aux axes coordonnés, tandis que les droites (δ) seront parallèles aux bissectrices des mêmes axes. Alors toutes les portions du contour qui devaient être des droites seront au moins des lignes asymptotiques; toutes celles qui devaient être des lignes de courbure situées dans des plans coupant normalement la surface seront au moins des lignes de courbure.

Comme les lignes asymptotiques qui figurent dans le contour ont pour représentation sphérique des arcs de cercle, elles seront, on le reconnaît aisément, des hélices tracées sur un cylindre quelconque si l'arc de cercle appartient à un petit cercle, et des droites si l'arc appartient à un grand cercle [1]. De même, les lignes de

[1] D'après une proposition énoncée au n° 142, les tangentes d'une ligne asymptotique sont perpendiculaires aux tangentes correspondantes de la représentation sphérique de cette ligne. Il suit de là que, si une ligne asymptotique admet pour image sphérique un petit cercle de la sphère, ses tangentes seront parallèles aux génératrices rectilignes du cône circonscrit à la sphère suivant ce cercle, et feront, par conséquent, un angle constant avec le diamètre perpendiculaire au plan du cercle. La ligne asymptotique sera donc une hélice tracée sur un cylindre, d'ail-

courbure qui figurent dans le contour seront des lignes planes situées dans des plans coupant obliquement la surface si elles ont pour représentation sphérique un arc de petit cercle, et des lignes situées dans un plan normal à la surface si l'arc qui leur sert de représentation appartient à un grand cercle. Ainsi :

Parmi les surfaces de la famille définie par l'équation linéaire, il en existe une infinité (qui dépendent de quatre paramètres réels) pour lesquelles le segment (M) *est limité par des lignes asymptotiques hélicoïdales et des lignes de courbure planes se succédant suivant le même ordre que les droites et les plans qui composent le contour donné* a priori.

La première question proposée dans le numéro précédent s'interprète donc géométriquement de la manière suivante :

Peut-on choisir deux solutions particulières G et H de l'équation linéaire de telle manière que la représentation sphérique du contour (M) de la surface correspondante soit composée exclusivement d'arcs de grand cercle?

Considérons une surface quelconque de la famille, correspondante à deux intégrales particulières déterminées G′ et H′, et pour laquelle la représentation sphérique du contour sera un polygone (P′) composé d'arcs de petit cercle, polygone (P′) que l'on saura construire si l'on a intégré l'équation linéaire. Si l'on pose

$$u = -\frac{G}{H}, \qquad u' = -\frac{G'}{H'},$$

on aura évidemment

$$u = \frac{mu' + n}{pu' + q}, \tag{32}$$

m, n, p, q étant des constantes arbitraires et inconnues. La question proposée revient évidemment à la suivante : Peut-on, par l'emploi d'une transformation de la forme précédente, substituer au polygone (P′) un autre polygone (P), exclusivement composé d'arcs de grands cercles?

---

leurs quelconque. Réciproquement, si la ligne asymptotique est une hélice, sa représentation sphérique, on le reconnaît aisément, sera un petit cercle de la sphère.

Or la formule (32) définit ce que nous avons appelé, au n° **124**, une transformation *circulaire*, c'est-à-dire une transformation qui résulte d'un nombre pair d'inversions et dans laquelle, à un cercle, correspond un cercle. Pour qu'une telle transformation fasse correspondre au polygone (P′) un polygone (P) exclusivement composé d'arcs de grand cercle, il faut et il suffit, comme on sait, que tous les petits cercles qui forment les côtés de (P′) soient orthogonaux à un même cercle, qui sera nécessairement imaginaire. On aura ainsi autant de conditions à écrire qu'il y aura de côtés moins 3. Ces conditions seront nécessairement transcendantes; mais, d'après les recherches de M. Schwarz relatives au principe de Dirichlet, elles peuvent toujours être résolues et permettront de déterminer un nombre égal de constantes.

Cette première difficulté une fois levée, on obtiendra effectivement des surfaces minima limitées par des contours dont les éléments seront parallèles aux éléments correspondants du contour donné *a priori;* et il faudra disposer des constantes restées arbitraires pour rendre l'un de ces contours superposable au contour donné. Cette dernière question est celle dont l'étude générale n'a pas encore été entreprise.

On remarquera les caractères distinctifs de la méthode employée dans ce Chapitre. Les propriétés relatives aux deux représentations conformes de la surface n'y interviennent que d'une manière accessoire, et auraient même pu être complètement supprimées.

CHAPITRE XII.

APPLICATIONS DIVERSES DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE.

Méthode inverse dans laquelle on prend comme point de départ certaines équations différentielles linéaires dont on connaît l'intégrale générale. — Surfaces que l'on peut déduire de l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss. — Surfaces déduites de la forme $A\Pi(t-a)^{\alpha}$ adoptée pour $G(t)$ et $H(t)$. — Surface minima limitée par une ligne brisée plane et une droite parallèle au plan de la ligne brisée. — Problème de Gergonne. — Surfaces déduites de la forme $A\Pi\,\Theta^{\alpha}(t-a)\,\Pi\,H^{\beta}(t-b)$ adoptée pour $G(t)$ et $H(t)$. — Surface minima limitée par deux polygones fermés situés dans des plans parallèles. — Remarque générale sur les moyens de multiplier le nombre des solutions du problème. — Surface passant par trois droites situées d'une manière quelconque dans l'espace.

---

296. Le problème proposé ne pouvant être complètement résolu que dans le cas où l'équation linéaire formée au n° 293 est intégrable, ou, du moins, appartient à la classe de celles pour lesquelles on peut suivre la variation de deux intégrales dans toute l'étendue du plan, on est naturellement conduit à une marche inverse de celle qui a été suivie dans les deux Chapitres précédents. Il semble préférable d'étudier directement les équations du second ordre, en très petit nombre, auxquelles on a reconnu la propriété que nous venons de rappeler, c'est-à-dire dont on sait déterminer le groupe, et de chercher ensuite quels sont les contours pour lesquels elles peuvent donner la solution du problème proposé.

Au premier rang de ces équations, il faut placer celle à laquelle satisfait la série hypergéométrique

$$(1) \qquad t(1-t)\frac{d^2\theta}{dt^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\frac{d\theta}{dt}-\alpha\beta\theta=0.$$

Nous avons vu (n° 136) que, si α, β, γ sont réels, le rapport de deux solutions particulières donne la représentation sur la moitié supérieure du plan d'une aire plane ou sphérique, plus ou moins

complexe, limitée par trois arcs de cercle. Dans le cas où les trois cercles limites sont orthogonaux à un cercle imaginaire, on peut, en choisissant convenablement deux solutions, obtenir la représentation plane d'une aire sphérique limitée par trois arcs de grand cercle. Ce cas est caractérisé (n° 136) par l'inégalité

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha+1-\gamma)\,\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} < 0, \tag{2}$$

à laquelle on peut donner la forme plus simple

$$\sin\alpha\pi\,\sin\beta\pi\,\sin(\gamma-\alpha)\pi\,\sin(\gamma-\beta)\pi < 0. \tag{3}$$

Toutefois, l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique ne peut pas être employée sans préparation. Nous savons que, pour l'équation linéaire dont dépend la solution du problème et qui a été formée au n° 293, la somme des exposants des deux intégrales régulières relatives à chaque point critique doit être un nombre entier si le sommet correspondant est de première espèce, et la moitié d'un nombre impair dans le cas contraire. Or les exposants relatifs aux divers points singuliers de l'équation (1) sont

Pour le point 0	0,	$1-\gamma$;
Pour le point 1	0,	$\gamma-\alpha-\beta$;
Pour le point ∞	α,	β,

et ne satisfont pas, par conséquent, à la condition que nous venons de rappeler.

Mais il suffira de substituer à la fonction θ, qui satisfait à l'équation (1), la fonction plus générale

$$\Theta = t^{\frac{\mu-1}{2}}(1-t)^{\frac{\nu-1}{2}}\,\theta, \tag{4}$$

qui est déterminée également par une équation du second ordre; et l'on reconnaîtra aisément qu'il est possible de déterminer μ et ν de manière à satisfaire, pour les trois points, à la condition indiquée. Car les trois équations auxquelles on est ainsi conduit

$$\left\{\begin{aligned} \mu-1+1-\gamma &= \frac{n-2}{2},\\ \nu-1+\gamma-\alpha-\beta &= \frac{n'-2}{2},\\ \alpha+\beta-\mu-\nu+2 &= \frac{n''+6}{2}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

sont toujours compatibles, pourvu que les nombres entiers n, n', n'' vérifient la relation

$$n + n' + n'' = 0,$$

qui détermine n'' lorsque n et n' sont connus.

Nous venons de multiplier θ par des puissances de t et de $1 - t$. On sait que, si ces puissances sont convenablement choisies, on peut trouver trois fonctions qui satisfont à une équation de même forme que l'équation (1), mais où α, β, γ ont d'autres valeurs. L'une quelconque des quatre équations ainsi obtenues pourrait être choisie et conduirait toujours aux mêmes valeurs de Θ. Pour ces quatre équations, les quantités $1 - \gamma$, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ ont les mêmes valeurs absolues et ne diffèrent que par le signe; nous supposerons que l'on ait choisi celle pour laquelle les inégalités suivantes

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 - \gamma &> 0, \\ \gamma - \alpha - \beta &> 0, \\ \alpha - \beta &> 0 \end{aligned} \right.$$

sont vérifiées.

297. Conformément aux résultats du n° **136**, on obtiendra l'équation de la surface minima, en prenant pour G et H les valeurs suivantes

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} G &= \frac{K}{C} t^{\frac{\mu-1}{2}+1-\gamma}(1-t)^{\frac{\nu-1}{2}} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, t), \\ H &= -K\, t^{\frac{\mu-1}{2}}(1-t)^{\frac{\nu-1}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma, t), \end{aligned} \right.$$

C étant la constante dont la valeur est donnée par la formule (9) du n° **268**,

$$(8) \qquad C = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \sqrt{- \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta-\gamma)}},$$

et K désignant une constante arbitraire.

Comme on a, d'après une formule connue,

$$(9) \qquad GH' - HG' = \frac{(1-\gamma)K^2}{C} t^{\frac{n}{2}-2}(1-t)^{\frac{n'}{2}-2},$$

on déduira de là

$$(10) \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1-\gamma}{C}}\sqrt{-2iK^2}\int t^{\frac{n}{4}-1}(1-t)^{\frac{n'}{4}-1}dt.$$

On voit que, si la portion du contour relative aux valeurs de t comprises entre 0 et 1 est une droite, il faudra prendre pour K^2 une valeur réelle; sinon, K^2 devra être purement imaginaire.

298. La surface que nous venons de déterminer pourra avoir des formes très variées dans le voisinage des sommets du contour. Cherchons d'abord à quelles conditions l'un quelconque de ces sommets sera à distance finie.

Pour le sommet (0), le plus petit des exposants est $\frac{\mu-1}{2}$; pour que l'intégrale $\int H^2(t)\,dt$ qui lui correspond soit finie, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu > 0.$$

On trouvera de même pour le sommet (1) la condition

$$\nu > 0,$$

et pour le sommet (∞) la condition

$$\rho > 0,$$

après avoir posé

$$\mu + \nu - 2 - 2\beta = -1 - \rho;$$

ce qui ramène les équations entre μ, ν, ρ, α, β, γ à la forme

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} 1-\gamma &= \frac{n}{2} - \mu,\\ \gamma - \alpha - \beta &= \frac{n'}{2} - \nu,\\ \alpha - \beta &= 2 - \rho - \frac{n+n'}{2}.\end{aligned}\right.$$

Nous allons d'abord examiner si les trois sommets peuvent être à distance finie.

Les premiers membres des équations précédentes étant nécessairement positifs ainsi que μ, ν, ρ, on aura, dans le cas qui nous occupe, les inégalités

$$n > 0, \qquad n' > 0, \qquad \frac{n+n'}{2} < 2,$$

qui n'admettent que les trois solutions suivantes :

$$n = 1, \quad n' = 1, \quad n'' = -2;$$
$$n = 1, \quad n' = 2, \quad n'' = -3;$$
$$n = 2, \quad n' = 1, \quad n'' = -3.$$

Dans les trois solutions, le contour a un seul sommet de première espèce. On peut supposer qu'il corresponde à la valeur ∞ de t, et l'on voit ainsi que les deux derniers cas se ramènent au premier.

Les surfaces obtenues sont celles qui ont été étudiées au n° **268** et leurs surfaces adjointes qui sont limitées par une droite et par deux plans.

299. Si l'on veut que la surface ait un secteur infini, il y aura une infinité de solutions. Il suffira, par exemple, de prendre pour les entiers n et n' des valeurs positives dont la somme soit supérieure à 3. Mais on peut, avec Riemann, ne considérer que les secteurs infinis ayant une forme particulière, et semblables à un hélicoïde ou à la portion de l'alysséide comprise entre deux plans méridiens. Alors il faudra que, comme cela a lieu dans l'hélicoïde à plan directeur, la somme des exposants des deux intégrales régulières relatives au point considéré soit égale à -1 ou à 1, suivant que la valeur correspondante de t est finie ou infinie. Si nous supposons que le secteur infini correspond à la valeur ∞ de t, nous trouverons, en exprimant la condition précédente,

$$\alpha + \beta - \mu - \nu + 2 = 1,$$

ce qui donne

$$n + n' = 4.$$

Prenons

$$n = 2 + h, \qquad n' = 2 - h;$$

nous aurons, d'après les formules (11),

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} 1 - \gamma &= 1 + \frac{h}{2} - \mu, \\ \gamma - \alpha - \beta &= 1 - \frac{h}{2} - \nu, \\ \alpha - \beta &= \phantom{1 - \frac{h}{2}} - \rho. \end{aligned}\right.$$

Si les deux autres sommets du contour doivent être à distance

finie, on aura nécessairement

$$\mu > 0, \qquad \nu > 0.$$

On déduit de là et des équations précédentes

$$\frac{h}{2} > -\gamma, \qquad \frac{h}{2} < 1 - (\gamma - \alpha - \beta)$$

et, par suite,

$$h > -2, \qquad h < 2.$$

Si l'on prend $h = -1$, on obtient le système suivant

$$(13) \qquad \begin{cases} 1 - \gamma = \frac{1}{2} - \mu, \\ \gamma - \alpha - \beta = \frac{3}{2} - \nu, \\ \alpha - \beta = \quad -\rho; \end{cases}$$

si l'on fait $h = 0$, on trouve

$$(14) \qquad \begin{cases} 1 - \gamma = 1 - \mu, \\ \gamma - \alpha - \beta = 1 - \nu, \\ \alpha - \beta = \quad -\rho. \end{cases}$$

Il est inutile de considérer le cas où $h = 1$, qui se ramène au premier par l'échange de t et de $1 - t$.

Pour le premier cas, correspondant aux formules (13), les deux sommets à distance finie sont de seconde espèce. La chaîne se compose, soit d'un plan et de deux droites qui coupent le plan et ne se coupent pas, soit d'une droite et de deux plans qui coupent la droite.

Dans le second cas, qui correspond aux formules (14) et a été considéré par Riemann (n°s 262 et 269), le contour est formé de trois droites dont l'une coupe les deux autres.

Dans l'un et l'autre cas, il y a une infinité de surfaces passant par un contour donné.

En donnant d'autres valeurs aux nombres entiers qui entrent dans les formules (11), on trouverait d'autres cas dans lesquels le segment déterminé aura deux ou trois secteurs infinis. Mais deux seulement de ces secteurs pourront être hélicoïdaux; car, si les trois l'étaient, la somme des exposants des six intégrales régulières relatives aux trois points critiques devrait être égale à -1, tandis

que sa valeur est 1 dans tous les cas. Nous retrouverons plus loin, et par d'autres méthodes, la surface passant par trois droites et pour laquelle les trois segments sont hélicoïdaux.

300. Nous allons maintenant nous donner *a priori* des valeurs de $G(t)$ et $H(t)$ qui permettront de résoudre le problème proposé dans un cas très étendu.

Prenons

$$(15)\qquad \begin{cases} G(t) = A\prod(t-a)^\alpha, \\ H(t) = B\prod(t-a)^\beta, \end{cases}$$

a et α, β désignant des constantes réelles, A, B des constantes quelconques. Nous supposerons que les exposants soient liés par les relations

$$(16)\qquad \Sigma\alpha = \Sigma\beta = -1,$$

par lesquelles on exprime simplement que la valeur ∞ attribuée à t n'est une valeur critique pour aucune des deux fonctions.

Les seuls points singuliers des intégrales G et H correspondent alors aux valeurs de t telles que a; et pour que, dans le voisinage de ces points singuliers, G et H soient de la forme (26) (n° **291**), il faudra que l'on ait

$$(17)\qquad \alpha + \beta = \frac{n}{2},$$

l'entier n étant pair si le sommet correspondant du contour est de première espèce, et impair dans le cas contraire. Les relations (16) nous donnent alors

$$(18)\qquad \Sigma n = -4;$$

examinons maintenant quel est le contour de la surface obtenue.

Le calcul de σ nous donne

$$(19)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2iAB\prod(t-a)^{\frac{n}{2}}\sum\frac{\alpha-\beta}{t-a}.$$

D'autre part, la valeur de z est déterminée, en chaque point du

contour, par l'équation

$$(20) \qquad \frac{dz}{dt} = \Re\, 2i\mathrm{AB}\prod (t-a)^{\frac{n}{2}}.$$

Supposons que les constantes A, B aient été choisies de telle manière que le produit A^2B^2 soit réel. Il est évident que le produit

$$\mathrm{AB}\prod (t-a)^{\frac{n}{2}}$$

est, ou réel, ou purement imaginaire, dans chacun des intervalles réels séparés par les valeurs singulières. Soit $(a_k a_{k+1})$ un des intervalles pour lesquels ce produit est réel; alors, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ étant purement imaginaire, la portion correspondante du contour sera une ligne asymptotique; d'autre part, $\frac{dz}{dt}$ étant nulle d'après la formule (20), cette ligne asymptotique sera dans un plan parallèle au plan des xy : ces deux conditions ne peuvent être remplies que par une droite parallèle au plan des xy. Si, au contraire, nous considérons un des intervalles pour lesquels $\mathrm{AB}\prod (t-a)^{\frac{n}{2}}$ est purement imaginaire, il suffira de passer à la surface adjointe et de répéter le raisonnement précédent; la portion du contour de la surface adjointe relative à l'intervalle considéré sera une droite parallèle au plan des xy. Donc (n° 285) la portion correspondante du contour de la surface proposée sera formée par une courbe plane située dans un plan parallèle à l'axe des z et que la surface coupera normalement.

On obtient donc une solution du problème proposé *pour le cas où le contour est formé par des droites, en nombre quelconque, parallèles à un plan fixe* (P) *et par des plans, également en nombre quelconque, perpendiculaires au même plan* (P). Il serait aisé d'ailleurs de démontrer que cette solution est la plus générale, au moins si l'on suppose qu'à l'intérieur, ou sur le contour et en dehors des sommets du segment cherché, ne se trouve aucun point où le plan tangent soit parallèle au plan (P) [1].

---

[1] Pour établir *a priori* la forme admise dans le texte, supposons que le plan (P) soit horizontal et ait été pris pour plan des xy. Alors, sur chaque partie

301. Nous indiquerons les deux applications suivantes.

Prenons d'abord tous les entiers n égaux à zéro, sauf deux auxquels nous attribuerons la valeur -2, pour satisfaire à la relation (18); et supposons que les valeurs a de t correspondantes à ces deux derniers exposants soient 0 et ∞. Les valeurs de G et

---

du contour, la normale demeurera parallèle à un plan vertical fixe et, par conséquent, l'argument de u sera constant. Donc la fonction

$$\frac{d \log u}{dt}$$

sera réelle pour toutes les valeurs réelles de t. Cette fonction a des pôles qui correspondent aux divers sommets du contour; d'autre part, si le plan tangent ne devient horizontal en aucun point situé à l'intérieur du segment ou sur un côté du contour, elle ne devient infinie pour aucune valeur réelle ou imaginaire de t différente de celles qui correspondent aux sommets de ce contour. On a donc

$$\frac{d \log u}{dt} = \sum \frac{\alpha'}{t-a},$$

et l'on déduit de là, en intégrant,

$$u = A' \prod (t-a)^{\alpha'}.$$

De même, la fonction $\frac{dz}{dt}$ étant nulle sur toutes les droites du contour, le produit GH demeurera réel quand on se déplacera sur chacune de ses droites. La considération de la surface adjointe montre que GH sera, au contraire, purement imaginaire sur chacune des lignes de courbure planes du contour. On déduit de là, en considérant encore la fonction $\frac{d \log GH}{dt}$, que GH sera de la forme

$$GH = B' \prod (t-a)^{\frac{n}{2}}.$$

Les deux formules précédentes donnent bien les valeurs de G et de H admises dans le texte.

Si l'on veut faire intervenir des points où le plan tangent soit horizontal et situés soit à l'intérieur, soit sur le contour du segment, il suffira d'adjoindre à une des deux intégrales G, H des facteurs tels que

$$(t-b)^{n'},$$

où b sera réel, et

$$(t-c)^{n''}(t-c_1)^{n''},$$

où c et c_1 seront des quantités imaginaires conjuguées.

de H prendront alors la forme suivante

$$(21)\quad \begin{cases} G(t) = A t^h \prod (t-a)^\alpha, \\ H(t) = B t^{-1-h} \prod (t-a)^{-\alpha}. \end{cases}$$

Si le produit AB est réel et si les exposants α sont tous inférieurs en valeur absolue à $\frac{1}{2}$, tous les sommets correspondants aux valeurs finies de t seront à distance finie, tandis qu'il y aura deux secteurs infinis correspondants aux valeurs o, ∞ de t. Nous déterminons ainsi le segment (M) de surface minima *compris entre une ligne brisée plane composée d'un nombre quelconque de côtés et une droite qui est parallèle au plan de la ligne brisée.*

On trouve

$$z = \Re \int 2iAB \frac{dt}{t} = \Re\, 2iAB \log t.$$

Comme on a

$$\log t = \log \rho + i\varphi,$$

ρ désignant le module et φ l'argument de t qui demeure compris entre o et π, on voit que z varie entre o et $-2AB\pi$. On devra donc prendre

$$2AB\pi = -\delta,$$

δ étant la distance de la droite au plan de la ligne brisée. Les constantes qui demeurent arbitraires se détermineront par la condition que les côtés de la ligne brisée aient des longueurs données.

Cet exemple comprend comme cas particulier un de ceux qui ont été traités par Riemann; il suffit de supposer que la ligne brisée se réduit aux deux côtés d'un angle pour retrouver le second des problèmes signalés au n° 262.

302. On peut traiter de la même manière le problème de Gergonne (n° 265) et déterminer complètement la surface minima qui, passant par deux diagonales opposées d'un parallélépipède droit, coupe à angle droit deux faces latérales opposées de ce parallélépipède. Pour plus de simplicité, nous supposerons le parallélépipède rectangle (*fig.* 21).

On peut toujours admettre que les sommets a, b, c, d du contour correspondent à des valeurs de t que nous désignerons par

$$-b, \quad -a, \quad +a, \quad +b,$$

a étant plus petit que b. De cette manière, les courbes planes bc et da du contour correspondront aux deux intervalles $(-a, +a)$ et $(b, \infty, -b)$.

On doit poser ici

$$(22) \qquad \begin{cases} G = A(b+t)^{\alpha_1}(a+t)^{\alpha_2}(a-t)^{\alpha_3}(b-t)^{\alpha_4}, \\ H = B(b+t)^{\beta_1}(a+t)^{\beta_2}(a-t)^{\beta_3}(b-t)^{\beta_4}, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(23) \qquad \alpha_i + \beta_i = \frac{n_i}{2}, \qquad \Sigma n_i = -4,$$

les entiers n_i étant impairs, puisque tous les sommets du contour sont de seconde espèce. D'ailleurs, comme tous les sommets sont à distance finie, nous devons avoir

$$(24) \qquad \alpha_i > -\frac{1}{2}, \qquad \beta_i > -\frac{1}{2},$$

et, par conséquent, en ajoutant,

$$n_i > -2.$$

Les quantités n_i doivent être supérieures à -2; comme leur somme est -4, on a nécessairement

$$n_i = -1;$$

et les conditions (23) se ramènent à la forme

$$(25) \qquad \alpha_i + \beta_i = -\frac{1}{2}.$$

Si l'on tient compte des inégalités (24), on voit que α_i et β_i doivent être compris entre 0 et $-\frac{1}{2}$. Par suite, la différence $\alpha_i - \beta_i$ sera inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{2}$.

Or $(\alpha_i - \beta_i)\pi$ mesure, au signe près, l'un des angles formés par les deux grands cercles qui servent de représentation sphérique aux deux portions du contour se coupant au sommet (i); si l'on

désigne par $\alpha\pi$ l'angle de la diagonale ab avec le côté ad' du parallélépipède, ces deux cercles font entre eux les angles

$$\alpha\pi, \quad (1-\alpha)\pi.$$

Comme $(\alpha_i - \beta_i)\pi$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, il faudra prendre

$$(\alpha_i - \beta_i)\pi = \pm\alpha\pi;$$

cette équation, jointe à la formule (25), donne les deux systèmes de valeurs

$$(26) \qquad \begin{cases} \alpha_i = -\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}, \\ \beta_i = -\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

$$(27) \qquad \begin{cases} \alpha_i = -\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2}, \\ \beta_i = -\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

pour α_i et β_i. On pourrait faire différentes combinaisons de ces deux systèmes; mais, pour obtenir celle qui correspond à la *fig.* 21, nous remarquerons que l'on a ici

$$u = -\frac{G}{H} = -\frac{A}{B}(b+t)^{\alpha_1-\beta_1}(a+t)^{\alpha_2-\beta_2}(a-t)^{\alpha_3-\beta_3}(b-t)^{\alpha_4-\beta_4}.$$

Or, si l'on se reporte à la figure, on voit qu'en prenant un sens déterminé pour la normale, on a

$$\begin{aligned} u &= 0, \qquad \text{en } a \text{ et en } d, \\ u &= \infty, \qquad \text{en } b \text{ et en } c; \end{aligned}$$

il faut donc prendre

$$\alpha_1 > \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2, \quad \alpha_3 < \beta_3, \quad \alpha_4 > \beta_4,$$

ce qui détermine complètement les exposants et donne

$$(28) \qquad \begin{cases} G = A(a^2-t^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}(b^2-t^2)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}, \\ H = B(a^2-t^2)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}(b^2-t^2)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}, \\ u = -\frac{A}{B}\left(\frac{b^2-t^2}{a^2-t^2}\right)^{\alpha}. \end{cases}$$

Si l'on suppose que le plan des xz ait été pris parallèle à la face $ba'cd'$ du parallélépidède, u doit être réelle dans l'intervalle $(-a, +a)$; il faudra donc que $\frac{A}{B}$ soit réel. On peut d'ailleurs déterminer ce rapport par différents moyens.

Par exemple, on pourra exprimer que l'accroissement de x est le même en valeur absolue quand on passe du sommet b au sommet c, ou du sommet d au sommet a. En se reportant aux équations (3) [p. 454] qui définissent la surface, on est ainsi conduit à l'équation

$$2\int_0^a (G^2 - H^2)\,dt = 2\int_b^\infty (G^2 - H^2)\,dt,$$

Effectuons dans le second membre la substitution

$$t = \frac{ab}{t'}.$$

Un calcul facile donnera

$$G(t) = \pm i\frac{A}{B}\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha \frac{t'\,H(t')}{\sqrt{ab}}, \qquad H(t) = \pm i\frac{B}{A}\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \frac{t'\,G(t')}{\sqrt{ab}},$$

et l'équation prendra la forme

$$\int_0^a (G^2 - H^2)\,dt = \int_0^a \left[\frac{B^2}{A^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha} G^2 - \frac{A^2}{B^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2\alpha} H^2\right] dt,$$

ou encore

$$0 = \left[\frac{A^2}{a^{2\alpha}} - \frac{B^2}{b^{2\alpha}}\right] \times \int_0^a (a^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}-\alpha}(b^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}-\alpha}\left[\left(\frac{b^2 - t^2}{b}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{a^2 - t^2}{a}\right)^{2\alpha}\right] dt.$$

Tous les éléments de l'intégrale étant positifs, il faudra que l'on ait

$$\frac{A^2}{a^{2\alpha}} = \frac{B^2}{b^{2\alpha}}.$$

On prendra donc, pour satisfaire à cette équation,

$$A = \sqrt{iM}\,a^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\,b^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}},$$
$$B = \sqrt{iM}\,b^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\,a^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}},$$

et les valeurs définitives de $G(t)$, $H(t)$ seront

$$(29)\quad \begin{cases} G(t) = \sqrt{i\mathrm{M}}\left(\dfrac{a^2-t^2}{a}\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{b^2-t^2}{b}\right)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}, \\ H(t) = \sqrt{i\mathrm{M}}\left(\dfrac{a^2-t^2}{a}\right)^{-\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}}\left(\dfrac{b^2-t^2}{b}\right)^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}; \end{cases}$$

M sera une constante réelle : on le reconnaît immédiatement en exprimant que $\frac{dz}{dt}$ est nulle pour chaque point de la droite ab.

Le rapport $\frac{a}{b}$ se déterminera par la condition que le parallélépipède à l'intérieur duquel se trouve le segment déterminé (M) soit semblable au parallélépipède donné. Dans le cas où la base est carrée, il faudra faire $\alpha = \frac{1}{4}$ (¹).

303. Nous venons de montrer, par l'étude de deux problèmes particuliers, le parti que l'on peut tirer de la forme générale des valeurs de $G(t)$ et $H(t)$, donnée au n° 300. En continuant l'application de la méthode synthétique qui a réussi dans les exemples précédents, nous allons étudier deux formes nouvelles des mêmes intégrales, qui dépendent des fonctions elliptiques et nous donneront une solution élégante de l'un des problèmes étudiés par Riemann.

$\mathcal{G}(t)$ et $\mathfrak{H}(t)$ désignant les valeurs nouvelles des fonctions G et H, prenons

$$(30)\quad \begin{cases} \mathcal{G}(t) = \mathrm{A}\prod \mathrm{H}^{\alpha}(t-a)\prod \Theta^{-\beta}(t-b), \\ \mathfrak{H}(t) = \mathrm{B}\prod \mathrm{H}^{\alpha'}(t-a)\prod \Theta^{-\beta'}(t-b). \end{cases}$$

(¹) Si l'on cherche la valeur de la fonction $\mathfrak{F}(u)$ de M. Weierstrass relative à la surface que nous venons de déterminer, on est conduit à un résultat de la forme

$$\mathfrak{F}(u) = \frac{\mathrm{K}u^{\frac{1}{2\alpha}-2}}{\sqrt{\left(b-au^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(a-bu^{\frac{1}{\alpha}}\right)}}.$$

Pour le cube, on a $\alpha = \frac{1}{4}$ et l'on retrouve la forme de $\mathfrak{F}(u)$ donnée par M. Schwarz dans le Mémoire que nous avons cité (n° 265).

Dans ces formules, A et B désignent deux constantes quelconques; a, b, α, β, α', β' sont des constantes réelles, et le nombre des constantes a n'est pas nécessairement égal à celui des constantes b; enfin les symboles H et Θ désignent les transcendantes de Jacobi, le module k étant supposé réel et plus petit que l'unité. En répétant les raisonnements indiqués dans les numéros précédents, nous reconnaissons immédiatement que, si l'on donne à t des valeurs réelles quelconques, le contour de la surface correspondant à ces valeurs réelles de t se composera de droites parallèles au plan des xy ou de courbes situées dans des plans coupant la surface à angle droit et parallèles à l'axe des z; il suffira, pour cela, que le produit A^2B^2 soit réel et que les exposants satisfassent aux relations

$$\alpha + \alpha' = \frac{n}{2},$$

où n désignera toujours un nombre entier. Mais ici se présente une circonstance tout à fait exceptionnelle : si l'on change t en $t + iK'$, les formules bien connues

$$\Theta(t + iK') = H(t)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2t+iK'-2K)},$$
$$H(t + iK') = \Theta(t)e^{-\frac{i\pi}{4K}(2t+iK'-2K)}$$

montrent immédiatement que $\mathcal{G}(t)$ et $\mathfrak{H}(t)$ ne changeront pas de forme pourvu que les exposants soient liés par les relations

$$(31) \qquad \Sigma\alpha - \Sigma\beta = 0, \qquad \Sigma\alpha' - \Sigma\beta' = 0,$$

que nous supposerons vérifiées. Alors toutes les fonctions H se changeront en fonctions Θ, et réciproquement; on aura

$$(32) \qquad \begin{cases} \mathcal{G}(t + iK') = Ae^{\frac{i\pi}{2K}(\Sigma a\alpha - \Sigma b\beta)} \prod \Theta^{\alpha}(t-a) \prod H^{-\beta}(t-b), \\ \mathfrak{H}(t + iK') = Be^{\frac{i\pi}{2K}(\Sigma a\alpha' - \Sigma b\beta')} \prod \Theta^{\alpha'}(t-a) \prod H^{-\beta'}(t-b \end{cases}$$

Par conséquent, si l'on a

$$\beta + \beta' = \frac{n'}{2}$$

et si la somme

$$\Sigma a(\alpha + \alpha') - \Sigma b(\beta + \beta')$$

est un multiple de K, il y aura sur la surface un second contour tout semblable au premier, qui correspondra aux valeurs de t dont la partie réelle est quelconque, mais dont la partie imaginaire est iK'. Par suite, la portion de la surface qui contient tous les points pour lesquels la partie imaginaire est comprise entre o et iK' formera une espèce de bande, limitée par deux contours distincts, de la nature de ceux que nous avons étudiés, c'est-à-dire formés soit de droites, soit de plans que la surface coupera normalement, les droites étant, toutes, parallèles au plan des xy et les plans tous parallèles à l'axe des z.

Pour nous borner au cas le plus simple et le plus intéressant, nous supposerons que les exposants soient liés par les relations

$$(33) \qquad \alpha' + \alpha = 0, \qquad \beta' + \beta = 0.$$

Alors, si le produit AB est réel et si les exposants α, β sont tous inférieurs en valeur absolue à $\frac{1}{2}$, la bande de surface déjà définie sera limitée par deux lignes brisées situées dans deux plans parallèles au plan des xy. Les sommets de l'un des contours correspondront aux valeurs

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

de t et à ces valeurs augmentées de multiples de $2K$; ceux du second aux valeurs

$$b_1 + iK', \quad b_2 + iK', \quad \ldots,$$

et à ces valeurs augmentées également de multiples quelconques de $2K$.

La valeur de z, donnée par la dernière des formules (3) [p. 454], devient ici

$$(34) \qquad z = \mathcal{R} \int 2iAB\,dt = 2AB\,\mathcal{R}\,it.$$

Si donc on pose

$$(35) \qquad 2ABK' = -\delta,$$

le segment de surface sera tout entier compris entre le plan des xy et le plan

$$z = \delta.$$

La périodicité des fonctions Θ et H entraîne d'ailleurs certaines

propriétés de la surface; si, dans les expressions de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{H}$, on change t en $t+2K$, un calcul facile donne

$$(36)\qquad \begin{cases} \mathcal{G}(t+2K) = e^{-i\pi\Sigma\alpha}\,\mathcal{G}(t), \\ \mathcal{H}(t+2K) = e^{i\pi\Sigma\alpha}\,\mathcal{H}(t). \end{cases}$$

Ces formules définissent un déplacement parallèle à l'axe des z. Si donc on considère seulement le segment (M) de la surface qui correspond aux valeurs de t représentées par des points à l'intérieur du parallélogramme $(2K, iK')$ des demi-périodes, il suffira, pour obtenir toutes les autres parties de la surface, de faire tourner le segment (M) d'angles égaux aux multiples de $2\pi\Sigma\alpha$ autour d'un axe convenablement choisi, parallèle à l'axe des z. Nous allons chercher la condition pour que le segment (M) forme une surface annulaire fermée, qui sera alors nécessairement limitée par deux polygones fermés, et dont chaque point correspondra ainsi à une infinité de valeurs de t qui seront égales, à des multiples près de $2K$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que les valeurs de $\mathcal{G}^2(t)$, $\mathcal{H}^2(t)$ soient périodiques, ce qui aura toujours lieu d'après les équations (36), si l'on a l'unique relation

$$(37)\qquad \Sigma\alpha = N,$$

N désignant un nombre entier. La première des équations (31) nous donne alors la relation

$$\Sigma\beta = N,$$

à laquelle devront satisfaire les exposants β.

Considérons maintenant une section plane quelconque dont le plan soit parallèle au plan des xy. Elle correspond, d'après la formule (34), à une valeur de t

$$u + ih,$$

dont la partie imaginaire est constante. Pour que cette courbe soit fermée, il faudra, comme le montrent les formules qui déterminent la surface, que les deux intégrales

$$\mathcal{R}\int_{ih}^{ih+2K} i(\mathcal{G}^2 - \mathcal{H}^2)\,dt, \qquad \mathcal{R}\int_{ih}^{ih+2K} (\mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2)\,dt$$

soient nulles toutes les deux. Il suffit d'intégrer le long d'un rectangle pour reconnaître que ces deux intégrales seront nulles pour toutes les valeurs de h, si elles le sont pour $h = 0$.

En résumé, si les trois conditions suivantes sont vérifiées,

$$(38)\quad \begin{cases} \Sigma\alpha = \Sigma\beta = \mathrm{N}, \\ \mathfrak{R}\displaystyle\int_0^{2\mathrm{K}} i(\mathcal{G}^2 - \mathfrak{H}^2)\,dt = 0, \qquad \mathfrak{R}\displaystyle\int_0^{2\mathrm{K}} (\mathcal{G}^2 + \mathfrak{H}^2)\,dt = 0, \end{cases}$$

la surface minima déterminée sera un segment annulaire (M), à connexion double, compris entre deux plans parallèles dont la distance est δ et limité par deux polygones fermés quelconques situés dans ces plans. Ces deux polygones, qui n'ont pas nécessairement le même nombre de côtés, seront, l'un et l'autre, de l'espèce N; c'est-à-dire qu'un point mobile ne pourra revenir au point de départ après les avoir entièrement parcourus qu'après avoir fait N tours complets. On reconnaît aisément que le nombre de constantes arbitraires contenu dans la solution est précisément égal à celui des arbitraires qui sont nécessaires pour la détermination complète du contour.

Cet exemple est le dernier de ceux qui ont été traités par Riemann (n° 262). On peut l'étudier d'une manière directe en suivant la méthode indiquée plus haut, dans la Note du n° 300 [1].

304. Nous développerons maintenant une remarque générale qui nous paraît de nature à faire mieux comprendre le caractère propre des solutions précédentes. Soit

$$(39)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + p\frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0$$

l'équation linéaire dont deux solutions connues, G et H, doivent être substituées dans les formules qui déterminent la surface. Substituons à la fonction θ la fonction plus générale θ_1, liée à θ par la relation

$$(40)\qquad \theta_1 = \sqrt{\mathrm{R}}\left(\frac{d\theta}{dt} + \mathrm{S}\theta\right);$$

---

[1] Riemann avait seulement indiqué que le problème pouvait être résolu; et les développements si intéressants donnés sur ce sujet dans les Œuvres complètes du grand géomètre (p. 418 et suiv.) sont l'œuvre de M. H. Weber.

R et S étant des fonctions de t qui seront réelles pour les valeurs réelles de t, et que, pour plus de simplicité, nous supposerons uniformes dans toute l'étendue du plan. Substituons au segment (M) de surface minima déterminé par les deux solutions G et H le segment (M_1) qui serait défini par les nouvelles fonctions

$$(41) \qquad G_1 = \sqrt{R}\left(\frac{dG}{dt} + SG\right), \qquad H_1 = \sqrt{R}\left(\frac{dG_1}{dt} + SG_1\right);$$

nous allons voir que ce segment (M_1) et le segment (M) sont limités l'un et l'autre par des contours qui ne sont pas nécessairement superposables, mais qui sont au moins de même espèce.

Soit, pour fixer les idées, (d) une droite du contour de (M), qui correspond à un intervalle réel (a_k, a_{k+1}) dans lequel varie t. Si l'on amène l'axe des y à être parallèle à la droite (d), il faudra effectuer sur G et H une certaine substitution linéaire dont la forme a été donnée au n° 282; il faudra aussi soumettre G_1 et H_1 à la même substitution linéaire, ou à une substitution dont les quatre coefficients auraient leur signe changé. Si donc on désigne par g, h, g_1, h_1 les nouvelles valeurs de G, H, G_1, H_1, il suit de la forme linéaire des relations (41) que l'on aura

$$g_1 = \varepsilon\sqrt{R}\left(\frac{dg}{dt} + Sg\right), \qquad h_1 = \varepsilon\sqrt{R}\left(\frac{dh}{dt} + Sh\right),$$

ε désignant toujours l'unité positive ou négative.

Cela posé, donnons à t la valeur réelle, comprise entre a_k et a_{k+1}, qui convient à un point de la droite (d); g et h seront toutes les deux réelles ou toutes les deux purement imaginaires (n° 287). Puisque, par hypothèse, R et S sont des fonctions réelles pour toutes les valeurs réelles de t, g_1 et h_1 seront, comme g et h, toutes les deux réelles ou toutes les deux purement imaginaires. Par suite, la portion du contour de (M_1) qui correspond à l'intervalle (a_k, a_{k+1}) sera aussi une droite (d_1), parallèle à la droite (d). La démonstration se ferait de la même manière si la portion considérée du contour de (M) était située dans un plan (P) normal à la surface : la portion correspondante du contour de (M_1) serait dans un plan (P_1) parallèle à (P) et normal à (M_1); on le reconnaît d'ailleurs presque immédiatement en passant aux surfaces ad-

jointes de (M) et de (M_1). La proposition que nous avions en vue est donc établie dans toute sa généralité.

Les fonctions R et S pourront s'annuler, avoir des pôles ou des points singuliers essentiels. Il en résultera, pour le segment (M_1), des singularités, ou des points de ramification, ou des nappes infinies; certains sommets du contour pourront être rejetés à l'infini, ou ramenés à distance finie; il pourra y avoir des stationnements ou des rebroussements sur certaines parties du contour. Nous n'insisterons pas sur toute cette discussion. Le point essentiel que nous avons voulu mettre en évidence, et qui est important pour la théorie générale des équations aux dérivées partielles, est le suivant : on peut trouver une infinité de surfaces minima, dépendant d'un nombre limité ou illimité d'arbitraires, qui contiendront toutes un contour de nature donnée; en sorte que la condition, pour une telle surface, de contenir un contour donné ne la détermine pour ainsi dire pas et ne permet pas, en particulier, de fixer la valeur ou la forme des fonctions arbitraires qui entrent dans son intégrale. Le problème est susceptible d'une solution précise et déterminée dans le cas seulement où l'on ajoute les conditions de continuité indiquées dans tous les exemples précédents.

305. M. J.-A. Serret, dans un article inséré au t. XL des *Comptes rendus* (¹), a montré qu'il existe une infinité de surfaces minima passant par deux droites, et que ces surfaces contiennent dans leur équation une fonction arbitraire. On obtiendra toutes ces surfaces en appliquant les remarques précédentes au problème particulier du n° 267. Les hélicoïdes obtenus dans cet article correspondent à des valeurs de H et de G qui sont de la forme suivante

$$G = t^m, \qquad H = t^{-1-m};$$

si on porte ces valeurs dans les formules (40), on aura

$$G_1 = t^m \sqrt{R}\left(S + \frac{m}{t}\right), \qquad H_1 = t^{-m-1}\sqrt{R}\left(S - \frac{1+m}{t}\right).$$

(¹) J.-A. Serret, *Sur la moindre surface comprise entre des lignes droites données, non situées dans le même plan* (*Comptes rendus*, t. XL, p. 1078; 1855).

La même question a aussi été traitée par M. O. Bonnet dans le Mémoire déjà cité *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables, etc.* (voir *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. V, p. 246).

ou, plus simplement,

$$G_1 = t^m \sqrt{P}, \qquad H_1 = t^{-1-m} Q \sqrt{P},$$

P et Q étant des fonctions réelles pour les valeurs réelles de t.

306. Supposons encore que, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ étant les valeurs de t relatives aux points singuliers, on prenne dans les formules (40)

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} S &= 0, \\ R &= \prod (t - a_k)^{n_k}, \end{aligned} \right.$$

tous les nombres n_k étant entiers et ayant leur somme nulle. On obtiendra la surface définie par les équations

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \Re \int i(G^2 - H^2) R\,dt, \\ y &= \Re \int (G^2 + H^2) R\,dt, \\ z &= \Re \int 2iGHR\,dt. \end{aligned} \right.$$

Le segment de cette surface qui correspond aux valeurs de t dont la partie imaginaire est positive est limité par un contour dont tous les éléments sont parallèles à ceux du contour qui limite la surface primitive. Ce segment n'offre d'ailleurs aucune singularité; certains sommets seulement pourront être rejetés à l'infini; d'autres ramenés à distance finie.

Si l'on prenait pour R une fonction réelle quelconque, on introduirait nécessairement des singularités; mais elles pourraient être toutes à une distance finie du contour.

307. Nous appliquerons encore les remarques précédentes aux différentes solutions du problème que nous avons obtenues au n° 297 par l'emploi de l'équation de Gauss. Nous avons vu que, si l'on pose

$$(44) \qquad \theta = t^{\frac{\mu-1}{2}} (1-t)^{\frac{\nu-1}{2}} F,$$

F désignant une solution particulière de l'équation de Gauss, les deux valeurs G et H de θ déterminées par les formules (7) définissent une surface minima contenant trois droites dont les angles

sont quelconques. Substituons à θ la fonction

$$\theta_1 = t(1-t)P(t)\frac{d\theta}{dt} + Q(t)\theta,$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ désignent des polynômes réels, de degrés $m-1$ et m respectivement, n'ayant aucun facteur commun. Les deux valeurs G_1, H_1 de θ_1, obtenues en substituant successivement G et H à θ, définiront une surface minima contenant trois droites et ne présentant, en dehors des sommets qui correspondent aux valeurs 0, 1, ∞, que des points de ramification; car les intégrales G_1 et H_1 sont partout finies et continues et elles ne s'annulent jamais simultanément en dehors de ces sommets. Étudions le cas le plus simple, celui où l'on a

$$(45) \qquad \theta_1 = ct(1-t)\frac{d\theta}{dt} + [at + b(1-t)]\theta,$$

les constantes a, b, c étant toutes réelles ou toutes purement imaginaires.

Alors les exposants des six intégrales régulières de l'équation en θ_1 sont (¹)

Pour le point 0............	$\frac{\mu-1}{2}$,	$\frac{\mu-1}{2}+1-\gamma$;
Pour le point 1............	$\frac{\nu-1}{2}$,	$\frac{\nu-1}{2}+\gamma-\alpha-\beta$;
Pour le point ∞..........	$\beta-\frac{\mu+\nu-2}{2}-1$,	$\alpha-\frac{\mu+\nu-2}{2}-1$

Si donc on pose

$$\mu-1+1-\gamma = \frac{n}{2}-1,$$

$$\nu-1+\gamma-\alpha-\beta = \frac{n'}{2}-1,$$

$$\beta+\alpha-2-(\mu+\nu-2) = \frac{n''}{2},$$

n, n', n'' seront des nombres entiers, pairs ou impairs suivant que le sommet correspondant sera de première ou de seconde espèce,

(¹) Pour certaines relations entre a, b, c, il est clair que quelques-uns de ces exposants pourraient s'élever. Par exemple, si la constante b est nulle, le premier exposant relatif au point 0 est augmenté d'une unité; et la somme des exposants

et l'addition des trois équations précédentes nous donnera

$$n + n' + n'' = 2.$$

Si les deux premiers sommets sont à distance finie, les sommes $\frac{n}{2} - 1$ et $\frac{n'}{2} - 1$ des exposants pour ces deux points devront être supérieures à -1. On aura donc

$$n + n' > 0$$

et, par conséquent,

$$n'' < 2.$$

Le troisième sommet sera donc à l'infini, et la surface aura un secteur infini, de forme plus ou moins compliquée. Nous laisserons de côté l'examen de toutes ces hypothèses et nous remarquerons seulement que la surface peut avoir trois secteurs infinis logarithmiques; ce qui aura lieu si l'on prend

$$n = 0, \qquad n' = 0, \qquad n'' = 2.$$

Les trois sommets sont alors de même espèce et l'on obtient une surface minima passant par trois droites dont aucune ne rencontre les deux autres. On a

$$\mu = \gamma - 1, \qquad \nu = -(\gamma - \alpha - \beta),$$

et l'on détermine les valeurs de G_1 et de H_1 qui font connaître la surface en substituant à la place de θ, dans la formule (45), les deux valeurs de G et de H définies par les équations (7). Il faudra, dans ces équations, remplacer μ et ν par les valeurs précédentes et prendre pour la valeur de K^2 une constante réelle quelconque. Il est inutile en effet de conserver à K^2 une valeur arbitraire puisqu'elle vient s'adjoindre comme facteur aux constantes a, b, c, qui entrent dans l'expression de θ_1. Si l'on prend, par exemple,

$$(46) \qquad K^2 = \frac{-C}{1-\gamma},$$

des six intégrales régulières, au lieu d'être égale à -1, devient égale à zéro. Nous laisserons de côté l'étude de ces cas exceptionnels qui conduiraient, si nous ne nous sommes pas trompé, à différentes surfaces parmi lesquelles se trouve celle qui a deux secteurs infinis hélicoïdaux et qui contient trois droites dont deux se coupent, l'ensemble de ces trois droites n'étant d'ailleurs assujetti à aucune autre condition.

la formule (9) nous donnera

$$(47) \qquad GH' - HG' = \frac{-1}{t^2(1-t)^2};$$

nous allons faire usage de cette relation.

Les fonctions G_1 et H_1 que nous venons d'óbtenir, et qui déterminent la surface, dépendent de six constantes arbitraires a, b, c, α, β, γ. Il est aisé de reconnaître que la forme du système formé par trois droites dépend également de six constantes : si l'on se donne, par exemple, les angles de ces droites et leurs plus courtes distances, on pourra d'abord construire le système formé par les deux premières; et, pour déterminer la troisième, il suffira de mener à deux cylindres de révolution ayant pour axes ces deux droites une tangente commune, parallèle à une droite donnée. Il semble donc que la surface déterminée dans la solution précédente pourra contenir trois droites quelconques : on peut mettre ce point essentiel hors de doute en employant la méthode suivante, qui a été donnée par Riemann.

308. Nous allons d'abord compléter les remarques générales présentées au n° **292**, en les étendant au cas où un secteur hélicoïdal infini correspond aux valeurs de t infiniment voisines d'une valeur singulière, que nous supposerons, pour fixer les idées, égale à zéro. Alors les deux intégrales régulières G et H, considérées au n° **291**, auront la somme de leurs exposants égale à -1; et l'on pourra poser

$$(48) \qquad \begin{cases} G = At^{-\frac{1}{2}-\frac{h}{2}}\{1+\alpha t+\ldots\}, \\ H = Bt^{-\frac{1}{2}+\frac{h}{2}}\{1+\alpha' t+\ldots\}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs de G et de H dans l'expression de σ, on aura

$$(49) \qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2i(HG' - GH') = -\frac{2iABh}{t^2}\{1+\beta t+\beta' t^2+\ldots\};$$

comme $\left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2$ doit être purement imaginaire pour les valeurs réelles de t, on voit que le produit AB sera nécessairement réel.

Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface s'obtiennent

en substituant dans les formules (3) (n° 281) les valeurs précédentes de H et de G. On trouve un résultat de la forme

$$(50)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{h}\,\Re\, i A^2 t^{-h}\{1+\theta\}, \\ y = -\dfrac{1}{h}\,\Re\; A^2 t^{-h}\{1+\theta'\}, \\ z = 2AB\,\Re\,[i\log t + \theta''], \end{cases}$$

θ, θ', θ'' étant des séries qui s'annulent pour $t = 0$.

En réduisant les valeurs de x et de y à leurs termes principaux, on aura

$$(51)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{h}\,\Re\, i A^2 t^{-h}, \\ y = -\dfrac{1}{h}\,\Re\; A^2 t^{-h}, \end{cases}$$

ou encore

$$x + iy = -\frac{i}{h} A^2 t^{-h}.$$

Lorsque le point variable t décrira, dans la partie supérieure du plan, un demi-cercle infiniment petit autour de l'origine, x et y seront très grands et l'argument de $x + iy$ augmentera de $h\pi$. Comme on passe ainsi de l'une des droites du contour à la suivante, on voit que l'angle du secteur infini sera égal en valeur absolue à $h\pi$.

D'autre part, la valeur de z, réduite à son premier terme

$$2AB\,\Re\, i\log t,$$

ou au produit de AB par l'argument de t pris en signe contraire, variera entre o et $-2AB\pi$. Si δ désigne la plus courte distance des deux droites qui limitent le contour infini, on aura donc

$$(52)\qquad \delta = -2AB\pi.$$

Le développement de l'invariant $\left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2$ sera donc de la forme

$$(53)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{\delta h i}{\pi}\,\frac{1}{t^2}\{1 + \beta t + \ldots\}$$

et son premier terme s'exprimera complètement au moyen des éléments géométriques δ et h. Ce résultat, dû à Riemann, est très

essentiel et nous allons en faire l'application. Remarquons seulement que, si le secteur infini correspond à une valeur infinie de t, il suffira de changer t en $\frac{1}{t}$ dans la formule précédente, ce qui donnera

$$(54)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{\delta h i}{\pi}\frac{1}{t^2}\left\{1+\frac{\beta}{t}+\frac{\beta'}{t^2}+\dots\right\}.$$

309. Appliquons à l'exemple que nous étudions ces remarques générales. Les angles des trois secteurs hélicoïdaux sont ici

$$(1-\gamma)\pi,\quad (\gamma-\alpha-\beta)\pi,\quad (\alpha-\beta)\pi.$$

Nous les désignerons par $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ respectivement.

D'autre part, on a généralement

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2i(H_1G'_1 - G_1H'_1),$$

et un calcul facile donne ici

$$(55)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2i(HG'-GH')[A(1-t)+Bt-Ct(1-t)],$$

A, B, C ayant les valeurs suivantes :

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= \left(b-\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2l^2}{4},\\ B &= \left(a+\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2m^2}{4},\\ C &= \left(a-b+\frac{3c}{2}\right)^2 - \frac{c^2n^2}{4}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace $HG'-GH'$ par sa valeur déduite de la formule (47), on a

$$(57)\qquad \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2i\,\frac{A(1-t)+Bt-Ct(1-t)}{t^2(1-t)^2}.$$

Pour $t=0$, on doit trouver, en développant suivant les puissances croissantes de t,

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \frac{i\delta l}{\pi}\frac{1}{t^2}+\dots,$$

δ désignant la plus courte distance des deux droites qui limitent le secteur.

On aura donc, en prenant le premier terme de ce développement dans la formule (57),

$$(58)\qquad \delta l = 2\pi A.$$

La considération des deux autres points donnerait de même

$$(58)_a\qquad \delta' m = 2\pi B, \qquad \delta'' n = 2\pi C,$$

δ' et δ'' étant les plus courtes distances des droites qui correspondent aux secteurs 1 et ∞.

On peut donc considérer A, B, C comme connues, et il reste à déduire des formules (56) les expressions de b, a, c.

310. Écrivons ces équations sous la forme

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} b - \frac{c}{2} &= +\varepsilon\sqrt{A + \frac{c^2 l^2}{4}},\\ a + \frac{c}{2} &= -\varepsilon'\sqrt{B + \frac{c^2 m^2}{4}},\\ a - b + \frac{3c}{2} &= +\varepsilon''\sqrt{C + \frac{c^2 n^2}{4}},\end{aligned}\right.$$

ε, ε', ε'' désignant l'unité positive ou négative; l'élimination de a et de b conduit à l'équation irrationnelle

$$(60)\qquad -\frac{c}{2} + \varepsilon\sqrt{A + \frac{c^2 l^2}{4}} + \varepsilon'\sqrt{B + \frac{c^2 m^2}{4}} + \varepsilon''\sqrt{C + \frac{c^2 n^2}{4}} = 0,$$

qui déterminera c.

Si l'on chassait les radicaux, on trouverait une équation du quatrième ordre par rapport à c^2. Nous discuterons cette équation seulement dans le cas où l, m, n sont inférieurs à 1, c'est-à-dire où les trois secteurs hélicoïdaux ont des angles moindres que π. Alors si, par un point de l'espace, on mène des parallèles aux trois droites en attribuant à ces parallèles un sens convenable, $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ seront les suppléments des angles formés par ces trois parallèles.

$l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ étant les angles d'un triangle sphérique, on a les

inégalités

$$(61)\qquad \begin{cases} 1+l-m-n>0, \\ 1+m-l-n>0, \\ 1+n-l-m>0, \end{cases} \qquad 1-l-m-n<0.$$

Par suite, si, dans l'équation (60), on fait d'abord

$$\varepsilon'=\varepsilon''=-\varepsilon,$$

et si l'on substitue à la place de c^2 les deux valeurs ∞ et 0, le premier membre sera certainement négatif pour $c=\infty$; mais, pour $c=0$, il aura un signe qui dépendra entièrement de celui du facteur ε. On peut donc choisir ε de telle manière que les résultats des deux substitutions précédentes soient de signes contraires, ce qui met en évidence une première racine au moins de l'équation en c^2.

Si l'on fait maintenant, soit

$$\varepsilon=\varepsilon''=-\varepsilon',$$

soit

$$\varepsilon=\varepsilon'=-\varepsilon'',$$

on trouvera encore deux autres équations irrationnelles, qui auront chacune au moins une racine réelle; ce qui donne, en tout, trois racines réelles de l'équation en c^2, convenant chacune à une forme connue de l'équation irrationnelle (60).

Pour séparer la quatrième racine, changeons c en $c'i$; l'équation (60) prend alors la forme

$$(60)_a\qquad \sqrt{\frac{c'^2l^2}{4}-A}\pm\sqrt{\frac{c'^2m^2}{4}-B}\pm\sqrt{\frac{c'^2n^2}{4}-C}\pm\frac{c'}{2}=0.$$

Adoptons la combinaison suivante des signes

$$\varepsilon\sqrt{\frac{c'^2l^2}{4}-A}+\sqrt{\frac{c'^2m^2}{4}-B}+\sqrt{\frac{c'^2n^2}{4}-C}-\frac{c'}{2}=0,$$

en supposant que $\frac{A}{l^2}$ désigne la plus grande des quantités $\frac{A}{l^2}$, $\frac{B}{m^2}$, $\frac{C}{n^2}$. Si nous substituons maintenant ∞ et la valeur

$$c'=\frac{2}{l}\sqrt{A}$$

le résultat de la première substitution aura le signe de

$$\varepsilon l + m + n - 1,$$

c'est-à-dire le signe de ε, d'après les inégalités (61). La seconde substitution donnera un résultat

$$m\sqrt{\frac{A}{l^2} - \frac{B}{m^2}} + n\sqrt{\frac{A}{l^2} - \frac{C}{n^2}} - \frac{\sqrt{A}}{l}$$

dont le signe est inconnu, mais ne dépend nullement de ε. On pourra donc choisir le signe de ε de telle manière que les résultats des deux substitutions soient de signes contraires, et l'on aura ainsi mis en évidence la quatrième racine. En portant successivement les valeurs de c dans les formules (59), on déterminera les valeurs correspondantes de a et de b, qui seront réelles si l'on prend pour c une des trois valeurs réelles, et purement imaginaires comme c si l'on emploie la dernière racine. On voit que l'on sera ainsi conduit à quatre surfaces différentes, pouvant toutes être acceptées.

Nous terminerons ici, avec le premier Volume de cet Ouvrage, la théorie des surfaces minima et l'étude du problème de Lagrange et de Plateau. Ce problème, qui doit compter au nombre des plus intéressants que l'expérience ait jamais posés aux Géomètres, est aussi un de ceux dont les progrès sont le plus étroitement liés à ceux de l'Analyse moderne; le lecteur l'aura certainement remarqué en étudiant les développements, peut-être trop rapides, donnés dans les trois derniers Chapitres.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE I.

APPLICATIONS A LA GÉOMÉTRIE DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

LIVRE II.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE COORDONNÉES CURVILIGNES.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

LIVRE III.

LES SURFACES MINIMA.

CHAPITRE I.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

ERRATA.

Page 174, ligne 17, *au lieu de* z, *lire* $z - z_1$.

Page 190, dans la troisieme et la quatrieme formule, échanger partout a et a', b et b'.

Page 282, introduire le produit $du\,dv$ dans le second membre de la formule qui donne dS et vient apres l'équation (6).

11424 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

quai des Augustins, 55.


3 2044 015 225 154





